



HOCHSCHULE  
NEUBRANDENBURG

University of Applied Sciences

# Validierung der Gabor-Transformation zur Auswertung von Zeitreihen im Kontext der geodätischen Bauwerksüberwachung

Masterthesis zur Erlangung des akademischen Grades

*Master of Engineering*

vorgelegt dem Fachbereich Landschaftswissenschaften und Geomatik der Hochschule  
Neubrandenburg

von

**Dennis Vollert, B. Eng.**

Gutachter:

1. Prof. Dr.-Ing. Karl Foppe
2. M. Eng. Uwe Köster

URN: urn:nbn:de:gbv:519-thesis-2025-0227-6

Neubrandenburg, August 2025



# **Eidesstattliche Erklärung**

Hiermit erkläre ich, dass ich die Masterarbeit mit dem Titel „Validierung der Gabor-Transformation zur Auswertung von Zeitreihen im Kontext der geodätischen Bauwerksüberwachung“ eigenständig erbracht, keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt und die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken als solche kenntlich gemacht habe. Die Arbeit wurde nicht, auch nicht in Teilen, unter Verwendung eines textbasierten Dialogsystems (wie ChatGPT) oder auf andere Weise mit Hilfe einer künstlichen Intelligenz von mir verfasst. Die Arbeit habe ich in gleicher oder ähnlicher Form oder auszugsweise noch keiner Prüfungsbehörde zu Prüfungszwecken vorgelegt. Des Weiteren bestätige ich, dass die schriftliche und die elektronische Version der Arbeit identisch sind. Mir ist bekannt, dass Zu widerhandlungen gegen den Inhalt dieser Erklärung einen Täuschungsversuch darstellen, der grundsätzlich das Nichtbestehen der Prüfung zur Folge hat.

Ich versichere ehrenwörtlich, dass ich nach bestem Wissen die reine Wahrheit gesagt und nichts verschwiegen habe.

Neubrandenburg, den 06. August 2025

Dennis Vollert



# Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit baut auf dem Fundament der Bachelorarbeit mit dem Thema „Schwingungsanalyse an der St.-Petri-Kirche Altentreptow“ [Vollert, 2022] auf und validiert den Einsatz der Kurzzeit-Fourier-Transformation (STFT), spezieller der Gabor-Transformation für die Auswertung von Zeitreihen geodätischer Messdaten, vorwiegend in der Bauwerksüberwachung. Die STFT bietet gegenüber der FFT die einzigartige Möglichkeit einer zeitbezogenen Darstellung von in einem Signal enthaltenen Periodizitäten (Ergebnis: zeitbezogene Amplituden und Frequenzen). Im Verlauf dieser Arbeit werden die verschiedenen Anwendungsbereiche und Fachdisziplinen, in denen die STFT Verwendung findet, dargestellt. Besonders eignet sich die STFT durch ihre spezielle Wirkungsweise (Verschiebung des Auswertefensters durch Verschiebungsparameter  $\tau$  entlang der Zeitachse) zur Auswertung nicht-stationärer Zeitreihen. Die aufgestellten Thesen werden durch eine Reihe simulierten Datensätzen, Versuchsmessungen sowie an einer Vielzahl von Messungen an realen Überwachungsobjekten validiert und die Eignung für die Auswertung von Zeitreihen in der Bauwerksüberwachung geprüft. Ein Fokus liegt hierbei auf dem Vergleich verschiedener Fensterfunktionen wie dem Gaußfenster (verwendet bei der Gabor-Transformation) und einer Gegenüberstellung der verschiedenen Fensterfunktionen hinsichtlich der Nutzbarkeit für Zeitreihen geodätischer Messdaten. Untersucht wird zudem die Notwendigkeit einer Entscheidung zwischen einer höheren Zeitauflösung, einer höheren Frequenzauflösung oder einem Kompromiss aus beiden Auflösungen, welche aufgrund der Charakteristiken der STFT nötig wird. Die Vorteile einer höheren Zeitauflösung werden mit den Vorteilen einer höheren Frequenzauflösung im Kontext der Bauwerksüberwachung verglichen. Ebenfalls wird die STFT weiteren, bereits erprobten Auswerteverfahren für geodätische Zeitreihen (DFT, FFT, etc.) gegenübergestellt und die Vor- und Nachteile der STFT im Vergleich zu diesen herausgearbeitet. Da die STFT bisher kaum in der Geodäsie angewendet wird, stellt die vorliegende Arbeit einen hohen Mehrwert dar und erlaubt durch die zeitbezogene Auswertung und zeitbezogene Darstellung der Ergebnisse der Zeitreihenanalyse einen interdisziplinären Austausch. Aus diesem Grund stellt die Anwendung der STFT auf das Gebiet der Geodäsie einen wichtigen Forschungsgegenstand dar.



# Danksagung

Ich möchte mich an dieser Stelle bei meinen Prüfern Herrn Prof. Dr.-Ing. Karl Foppe und Herrn M. Eng. Uwe Köster für die umfassende, fachliche Unterstützung bei der Anfertigung dieser Arbeit bedanken. Nicht nur im Rahmen dieser Arbeit konnten sie durch Vorlesungsinhalte sowie zahlreiche Übungen und Projekte mein Interesse an der ingenieurgeodätischen Bauwerksüberwachung sowie der Zeitreihen- und Schwingungsanalyse wecken. Ein besonderer Dank gilt dabei Herrn M. Eng. Uwe Köster für dessen tatkräftige Unterstützung und Organisation der Messungen vor Ort an der St.-Petri-Kirche Altentreptow und der Marienkirche Neubrandenburg, sowie für zahlreiche Ideen und Anmerkungen im Zusammenhang mit dieser Arbeit.

Ebenfalls möchte ich in diesem Kontext meinen Kommilitonen Nick Kirschke, Ede Zabel und Dominic Kluck danken, die mir stets unterstützend unter die Arme griffen, egal ob es um die messtechnische Umsetzung der Datenerfassung vor Ort, Bugs in der Programmierung, die notwendigen Kniffe in L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X oder das prototypische Entwerfen und 3D-Drucken von Adapterbauteilen ging.

Für das konzentrierte Lesen dieser Arbeit und für wichtige Hinweise im wissenschaftlichen Kontext danke ich Florian Leder und wünsche ihm alles Gute auf seinem weiteren akademischen Weg.

Für den moralischen Rückhalt und die Unterstützung während schwieriger Phasen im Prozess der Anfertigung dieser Arbeit danke ich von tiefstem Herzen Jane Staffeld.

Nicht zuletzt möchte ich auch meiner Familie meine tiefste Dankbarkeit aussprechen für ihre uneingeschränkte Unterstützung in allen Lebenslagen und während meines gesamten Studiums, ohne die ich nicht da wäre, wo ich heute bin.

Auch möchte ich den Mitarbeitern der Hochschule Neubrandenburg Felix Hahn und Martin Dumann danken. Besonders die Ablenkung, welche die Gespräche während einer Vielzahl von Raucherpausen boten, kam stets gelegen und gewährte einen neuen und frischen Blickwinkel auf die fachlichen Inhalte sowie nicht zuletzt auch einen wichtigen Rückhalt.

Ein genereller Dank gilt auch allen Professorinnen und Professoren, Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern der Hochschule Neubrandenburg, die mich während der Zeit meines Studiums unterstützt, gefordert und gefördert haben und so meine Leidenschaft für die Geodäsie weiter befeuert haben.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Eidesstattliche Erklärung</b>	<b>iii</b>
<b>Kurzfassung</b>	<b>v</b>
<b>Danksagung</b>	<b>vii</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>xiv</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>xv</b>
<b>1 Motivation</b>	<b>1</b>
<b>2 Zeitreihenanalyse</b>	<b>5</b>
2.1 Definition Zeitreihe . . . . .	6
2.2 Beispiele für Zeitreihen in nicht-geodätischen Disziplinen und deren Auswertung . . . . .	8
2.3 Beispiele für Zeitreihen in der Geodäsie und deren Auswertung . . . . .	10
2.4 Voraussetzungen für die Auswertbarkeit von Zeitreihen . . . . .	11
2.4.1 Stationarität . . . . .	11
2.4.2 Ergodizität . . . . .	12
2.4.3 Zentrierung . . . . .	13
2.4.4 Trendbefreiung . . . . .	13
2.4.5 Füllen von Datenlücken . . . . .	17
2.4.6 Eliminierung von Ausreißern . . . . .	19
2.4.7 Beseitigung von Datensprüngen . . . . .	20
2.4.8 Leck-Effekt und Fensterfunktionen . . . . .	22
2.4.9 Abtastung von zeitkontinuierlichen Signalen und NYQUIST-SHANNON-Abtasttheorem . . . . .	26
<b>3 Grundlagen der Spektralanalyse</b>	<b>29</b>
3.1 Fourier-Reihe . . . . .	29
3.2 Fourier-Transformation (FT) . . . . .	35
3.3 Diskrete-Fourier-Transformation (DFT) . . . . .	36
3.4 Fast-Fourier-Transformation (FFT) . . . . .	37
3.5 Kurzzeit-Fourier-Transformation (STFT) . . . . .	40
3.6 Gabor-Transformation . . . . .	43

<b>4 Auswertung von Zeitreihen mittels der Gabor-Transformation</b>	<b>47</b>
4.1 Auswertung von simulierten Daten . . . . .	48
4.1.1 Kompromiss aus Zeit- und Frequenzauflösung . . . . .	48
4.1.2 Beispiel für schlechte Zeitauflösung, gute Frequenzauflösung . . . . .	51
4.1.3 Beispiel für schlechte Frequenzauflösung, gute Zeitauflösung . . . . .	52
4.1.4 Auswertung einer Zeitreihe ohne Rauschen . . . . .	55
4.1.5 Auswertung einer Zeitreihe mit Rauschen . . . . .	56
4.1.6 Auswertung einer Zeitreihe mit linearem Trend . . . . .	58
4.1.7 Auswertung einer Zeitreihe mit einer Datenlücke . . . . .	59
4.1.8 Auswertung einer Zeitreihe mit einem Datensprung . . . . .	60
4.2 Beschreibung der verwendeten Sensorik . . . . .	62
4.2.1 Leica Nivel210 . . . . .	62
4.2.2 MEMS-Beschleunigungssensoren . . . . .	63
4.2.3 GNSS-Sensoren . . . . .	65
4.2.4 Tachymeter . . . . .	68
4.3 Auswertung von Labordaten . . . . .	70
4.3.1 Auswertung von Labordaten: Low-Cost-GNSS . . . . .	72
4.3.2 Auswertung von Labordaten: Beschleunigungsdaten Smartphone auf MEMS-Basis . . . . .	78
4.4 Auswertung von Daten an Realobjekten . . . . .	83
4.4.1 Kurze Vorstellung der Überwachungsobjekte . . . . .	83
4.4.2 Auswertung und Ergebnisse von Leica Nivel210 Daten unter Realbedingungen . . . . .	87
4.4.3 Auswertung und Ergebnisse von GNSS Daten unter Realbedingungen	90
4.4.4 Auswertung und Ergebnisse von Beschleunigungsdaten auf MEMS-Basis unter Realbedingungen . . . . .	92
4.4.5 Auswertung und Ergebnisse von Leica Tachymeter Daten unter Realbedingungen . . . . .	93
<b>5 Validierung der Verfahren und wissenschaftliche Diskussion</b>	<b>95</b>
5.1 Grenzen des Verfahrens . . . . .	96
5.2 Thesen . . . . .	98
<b>6 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>101</b>
6.1 Zusammenfassung . . . . .	101
6.1.1 Ausgangssituation . . . . .	101
6.1.2 Methodische Vorgehensweise . . . . .	101
6.1.3 Bewertung der Ergebnisse . . . . .	102
6.1.4 Erkenntnisse . . . . .	102
6.2 Ausblick . . . . .	103
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>105</b>

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Einteilung der Ingenieurgeodäsie [DIN 18710-1:2010-09] . . . . .	2
1.2	Am 11.09.2024 teilweise eingestürzte Carolabrücke in Dresden [Bybbisch94, 2024] . . . . .	3
2.1	Simulierte Daten: Sinusschwingung mit $f = 5\text{Hz}$ , $A = 0,5$ . . . . .	14
2.2	Simulierte Daten: Sinusschwingung mit normalverteiltem Rauschen $s = 0,6$ . . . . .	14
2.3	Simulierte Daten: Sinusschwingung mit linearem Trend $b = 0,15$ , $m = 0,2$ . . . . .	15
2.4	Simulierte Daten: Amplitudenspektrum der Sinusschwingung mit linearem Trend $b = 0,15$ , $m = 0,2$ . . . . .	15
2.5	Simulierte Daten: Trendfunktion bestimmt und abgezogen, $b = 0,15$ , $m = 0,2$ . . . . .	16
2.6	Simulierte Daten: Amplitudenspektrum der vom Trend befreiten Daten . . . . .	17
2.7	Simulierte Daten: Sinusschwingung mit normalverteiltem Rauschen und Datenlücke . . . . .	18
2.8	Simulierte Daten: Amplitudenspektrum der Zeitreihe mit Datenlücke . . . . .	18
2.9	Simulierte Daten: Sinusschwingung mit Rauschen und Datensprung . . . . .	21
2.10	Simulierte Daten: Amplitudenspektrum der Zeitreihe mit Datensprung . . . . .	21
2.11	Auswahl von Fensterfunktionen und deren Fourier-Transformierte . . . . .	25
2.12	Unterabtastung eines sinusförmigen Signals: die Abtastung von $x(t) = \cos(\omega_0 t)$ mit $\omega_0 > \frac{\omega_a}{2}$ liefert die gleichen Abtastwerte wie die Abtastung von $x_{alias}(t) = \cos(\omega'_0 t)$ mit $\omega'_0 = \omega_a - \omega_0$ . . . . .	27
3.1	Ölgemälde von JEAN BAPTISTE JOSEPH FOURIER in seiner Kleidung als Präfekt, gemalt von PIERRE-CLAUDE GAUTHEROT um 1806 [Gautherot, 1806] . . . . .	30
3.2	Simulierte Daten: Approximation an eines Rechtecksignals durch die Fourier-Reihe über Summenbildung. Darstellung von drei Perioden. . . . .	34
3.3	Simulierte Daten: Approximation an eines Rechtecksignals durch die Fourier-Reihe über Summenbildung. Darstellung von einer halben Periode. . . . .	34
3.4	Simulierte Daten: Rohdaten und Amplitudenspektrum eines Akkordwechsels von C-Dur auf F-Dur, ausgewertet mittels FFT . . . . .	39
3.5	Simulierte Daten: Rohdaten und Spektrogramm eines Akkordwechsels von C-Dur auf F-Dur, ausgewertet mittels STFT . . . . .	42
3.6	Dennis Gábor im Jahr der Nobelpreisverleihung 1971 [Commons, 2024] . . . . .	43
4.1	Blockschatzbild der Funktionsweise der Gabor-Transformation . . . . .	47
4.2	Simulierte Daten: Rohdaten, Spektrogramm und Amplitudenspektrum, Kompromiss aus Zeit- und Frequenzauflösung . . . . .	49

4.3 Simulierte Daten: Rohdaten und Spektrogramm, Beispiel für schlechte Zeitauflösung . . . . .	51
4.4 Simulierte Daten: Rohdaten und Spektrogramm, Beispiel für schlechte Frequenzauflösung . . . . .	52
4.5 Simulierte Daten: Spektrogramm, „Ausfließen der Frequenzen“ . . . . .	53
4.6 Simulierte Daten: Spektrogramm, geringe Zahl an Analysefenstern . . . . .	54
4.7 Simulierte Daten: Spektrogramm, ohne Rauschen . . . . .	55
4.8 Simulierte Daten: Spektrogramm, mit normalverteiltem Rauschen, Std.=0,7 . . . . .	56
4.9 Simulierte Daten: Spektrogramm, mit normalverteiltem Rauschen, Std.=2,6 . . . . .	57
4.10 Simulierte Daten: Spektrogramm, mit normalverteiltem Rauschen, Std.=0,7, Trendfunktion mit b=0,2, m=0,1 . . . . .	58
4.11 Simulierte Daten: Spektrogramm, mit normalverteiltem Rauschen, Std.=0,7, Datenlücke von 600 Messwerten . . . . .	59
4.12 Simulierte Daten: Spektrogramm, mit normalverteiltem Rauschen, Std.=0,7, Datensprung bei der Hälfte der Messzeit, Mittelwertänderung von 7 . . . . .	60
4.13 Leica Nivel210 . . . . .	63
4.14 Funktionsprinzip kapazitiver Abgriff eines Beschleunigungsmessers auf MEMS-Basis [Elektronik-Kompendium, 2025] . . . . .	64
4.15 Ansicht auf die Messeinheit einer Achse eines MEMS-Beschleunigungsmessers (links), integriert auf einem Chip (Mitte), verbaut in einem Smartphone (rechts) – Abgewandelte Darstellungen aus einem Video zum Funktionsprinzip eines MEMS-Beschleunigungssensors [Bosch Mobility Solutions, 2025] . . . . .	64
4.16 u-blox ZED-F9P-04B . . . . .	66
4.17 Leica GMX902 GG, geodätischer GNSS-Empfänger für Bauwerksüberwachungen . . . . .	68
4.18 Leica TM30, Präzisionstachymeter, speziell für Anwendungen in der Bauwerksüberwachung . . . . .	70
4.19 Labornetzteil der Firma LING DYNAMIC SYSTEMS mit einstellbarem Gain, Frequency und Frequency Range . . . . .	71
4.20 Messaufbau Schwingungserzeuger mit Low-Cost-GNSS-System als Sensor . . . . .	71
4.21 Messaufbau Schwingungserzeuger mit Smartphone-Halterung zur Beschleunigungsmessung . . . . .	72
4.22 Messaufbau Laboruntersuchungen Low-Cost-GNSS auf dem Dach der Hochschule Neubrandenburg . . . . .	73
4.23 Labordaten: Zeitreihe von kostengünstigen GNSS-Empfängern auf Schwingungserzeuger, Eigene Basis, Postprocessing, Konfiguration mit Bewegung in X/Y-Richtung . . . . .	74
4.24 Labordaten: Zeitreihe von kostengünstigen GNSS-Empfängern auf Schwingungserzeuger, Eigene Basis, Postprocessing, Konfiguration mit Bewegung in X/Y-Richtung . . . . .	75
4.25 Labordaten: Zeitreihe von kostengünstigen GNSS-Empfängern auf Schwingungserzeuger, Eigene Basis, Postprocessing, Konfiguration mit Bewegung in Z-Richtung . . . . .	76

4.26	Labordaten: Zeitreihe von kostengünstigen GNSS-Empfängern auf Schwingungserzeuger, Eigene Basis, Postprocessing, Konfiguration mit Bewegung in Z-Richtung . . . . .	77
4.27	Labordaten: Erste Zeitreihe von Beschleunigungsdaten auf Schwingungserzeuger, aufgenommen durch ein Samsung SM-S916B/DS (Galaxy S23+), Darstellung kompletter Frequenzbereich . . . . .	78
4.28	Labordaten: Erste Zeitreihe von Beschleunigungsdaten auf Schwingungserzeuger, aufgenommen durch ein Samsung SM-S916B/DS (Galaxy S23+), Darstellung kompletter Frequenzbereich, logarithmisch skaliert . . . . .	79
4.29	Labordaten: Erste Zeitreihe von Beschleunigungsdaten auf Schwingungserzeuger, aufgenommen durch ein Samsung SM-S916B/DS (Galaxy S23+), Darstellung bis 3,5 Hz . . . . .	80
4.30	Labordaten: Erste Zeitreihe von Beschleunigungsdaten auf Schwingungserzeuger, aufgenommen durch ein Samsung SM-S916B/DS (Galaxy S23+), Darstellung bis 7 Hz . . . . .	80
4.31	Labordaten: Erste Zeitreihe von Beschleunigungsdaten auf Schwingungserzeuger, aufgenommen durch ein Samsung SM-S916B/DS (Galaxy S23+), Darstellung bis 10 Hz . . . . .	81
4.32	Labordaten: Zweite Zeitreihe von Beschleunigungsdaten auf Schwingungserzeuger mit nahe zusammenliegenden Frequenzen, aufgenommen durch ein Samsung SM-S916B/DS (Galaxy S23+) . . . . .	82
4.33	Marienkirche Neubrandenburg . . . . .	84
4.34	Geläut der Marienkirche Neubrandenburg . . . . .	84
4.35	St.-Petri-Kirche Altentreptow . . . . .	86
4.36	Geläut der St.-Petri-Kirche Altentreptow . . . . .	86
4.37	Realdaten: Leica Nivel210 am Messort in der St.-Petri-Kirche Altentreptow 2022 . . . . .	88
4.38	Realdaten: Ergebnisse der Auswertung von Leica Nivel210 Daten mit der Gabor-Transformation an der St.-Petri-Kirche Altentreptow 2022 . . . . .	88
4.39	Realdaten: Ergebnisse der Auswertung von Leica Nivel210 Daten mit der Gabor-Transformation an der St.-Petri-Kirche Altentreptow 2022 - gezoomter Ausschnitt . . . . .	89
4.40	Realdaten: GNSS-Antenne an der Marienkirche Neubrandenburg im Jahr 2024 . . . . .	90
4.41	Realdaten: Ergebnisse der Auswertung von GNSS-Daten mit der Gabor-Transformation an Marienkirche Neubrandenburg - Sensor: kostengünstiger u-blox ZED-F9P-04B mit Ardusimple Antenne . . . . .	91
4.42	Realdaten: Ergebnisse der Auswertung von Beschleunigungsdaten auf MEMS-Basis mit der Gabor-Transformation an St.-Petri-Kirche Altentreptow - Sensor: Huawei P20 Pro (CLT-L09) . . . . .	92
4.43	Realdaten: Ergebnisse der Auswertung von Richtungsbeobachtungen mit der Gabor-Transformation an Marienkirche - Sensor: Leica TS30 . . . . .	93

- 5.1 Grenzen des Verfahrens: Ergebnisse der Auswertung von Beschleunigungsdaten mit der Gabor-Transformation an Marienkirche und großen Datenlücken - Sensor: Samsung Galaxy S5 Mini . . . . . 97

# Tabellenverzeichnis

3.1	Anzahl Rechenoperation DFT vs. FFT bei beispielhafter Anzahl Messdaten	38
4.1	Technische Daten Leica Nivel210 [Leica Geosystems, 2005]	63
4.2	Technische Daten u-blox ZED-F9P-04B [u-blox AG, 2025]	66
4.3	Technische Daten Leica GMX902 GG [Leica Geosystems AG, 2010]	68
4.4	Technische Daten Leica TM30 [Leica Geosystems, 2009]	69
4.5	Zusammenstellung gemessener Glocken- und Gebäudefrequenzen Marienkirche Neubrandenburg [Engel et al., 2017]	85
4.6	Zusammenstellung gemessener Glocken- und Gebäudefrequenzen St.-Petri-Kirche Altentreptow [Vollert, 2022]	87



# 1 Motivation

„Zeit ist das, was man an der Uhr abliest.“

---

(Albert Einstein, 1879 - 1955)

Zeitbezogene Daten spielen in der modernen Gesellschaft der Neuzeit eine unerlässliche Rolle. Kaum eine Information tritt ohne einen diskretisierten Zeitbezug auf. Beispielsweise ist eine Verabredung zum Fußballspielen zwischen zwei Kindern auf dem Fußballplatz wertlos ohne eine Zeitangabe. Selbiges gilt nicht nur für die Festlegung eines zeitlichen Bezugssystems, sondern auch für die Festlegung eines räumlichen Bezugssystems. An dieser Stelle soll der Fokus jedoch auf dem Zeitbezug liegen. Im Zeitalter der Digitalisierung und der digitalen Datenerfassung- und Speicherung ist die schiere Menge an Daten exponentiell über die letzten Jahrzehnte angestiegen. Die digitale Transformation folgt in direkter Weise aus den mittlerweile nahezu unbegrenzten Kapazitäten in der digitalen Datenverarbeitung, der Datenspeicherung und dem weltweiten Austausch der Daten.

Zeitreihen spielen hierbei eine übergeordnete Rolle und treten in den vielfältigsten Formen auf. Wird ein kontinuierlicher, zeitabhängiger Prozess betrachtet, so wird die Realisierung dieses Prozesses zu diskreten Zeitpunkten als Zeitreihe bezeichnet. Diese vereinfachte Darstellung wird in [Kapitel 2](#) ausführlich beschrieben. Beispiele für Zeitreihen in der heutigen Zeit sind vielfältiger Natur, zu nennen sind die zeitliche Veränderung von Aktienkursen, Temperaturaufzeichnungen, meteorologische- und Wettermodelle, astronomische Prozesse und Bewegungen, Preisveränderungen von Produkten im Supermarkt, Entwicklung der Weltbevölkerung, zeitliche Entwicklung der Wahlbeteiligung, zeitliche Entwicklung von Extremwetterereignissen, Arbeitslosigkeitsraten, Entwicklung des aktuellen Fachkräftemangels und viele mehr. Die Disziplin der Verarbeitung, Auswertung und Interpretation solcher Zeitreihen ist die Zeitreihenanalyse. Thema dieser Masterthesis ist die Analyse von Zeitreihen in der geodätischen Bauwerksüberwachung.

Die Ingenieurgeodäsie unterliegt dem Wandel der digitalen Transformation in gleichem Maße wie alle anderen Disziplinen und Fachbereiche. Wo früher Messdaten analog am Theodolit abgelesen und in einem Feldbuch notiert wurden, erheben heute digital registrierende Instrumente wie Totalstation und Digitalnivellier Massendaten mit hohen Aufnahmefrequenzen. Ein besonderer Fokus liegt hierbei auf Datenhaltung und Datensicherheit. Heute erleichtert rechenstarke Software die Auswertung, was dem klassischen Berufsbild des Vermessingenieurs eine Vielzahl neuer Fähigkeiten im Umgang mit Massendaten abverlangt. So ist das moderne Feld der Geodäsie heute eine Verschmelzung teils verwandter Fachdisziplinen, die sich von der elektronischen Datenverarbeitung über die Programmierung, die Signalanalyse bis hin zur Elektronik und Mikroelektronik im Rahmen der Entwicklung neuer Sensoren aus dem MEMS-Bereich erstreckt, um nur einige Beispiele zu nennen.

Die Ingenieurgeodäsie beschäftigt sich nach der klassischen und anerkannten Definition der [DIN 18710-1:2010-09] mit der Aufnahme, Projektierung, Absteckung, Abnahme und Überwachung von Ingenieurbauwerken, welche sich durch ein erhöhtes öffentliches Interesse und damit verbundene Sicherheitsanforderungen auszeichnen. Klassische Beispiele für

Ingenieurbauwerke sind Brücken, Staudämme, Gebäude der öffentlichen Infrastruktur, Industrieanlagen und viele mehr.

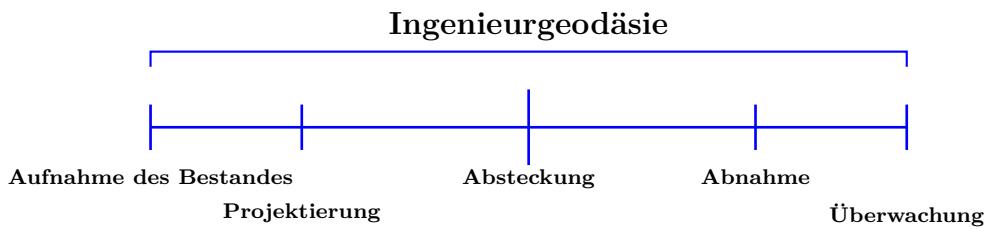


Abbildung 1.1: Einteilung der Ingenieurgeodäsie [DIN 18710-1:2010-09]

Zur Sicherstellung und Gewährleistung der Stand- und Funktionssicherheit von Ingenieurbauwerken, um in erster Linie Schaden von menschlichem Leben abzuwenden und in zweiter Linie wirtschaftliche Schäden zu vermeiden, beschäftigt sich ein Teilgebiet der Ingenieurgeodäsie mit Überwachungsmessungen von Ingenieurbauwerken (siehe Abbildung 1.1). Geodätische Überwachungsmessungen dienen dem Erkennen, Bewerten und Vermeiden von geometrischen oder anderen Veränderungen an Bauwerken, die zu unerwünschten Ereignissen führen und sind somit essenzieller Bestandteil eines Risikomanagements. Die aus der Überwachungsmessung gewonnenen Erkenntnisse sind interdisziplinär austauschbar und Teil einer fachübergreifenden Kooperation. [Heunecke et al., 2013] definieren wesentliche Zielsetzungen geodätischer Überwachungsmessungen wie folgt:

- Beitrag zum Nachweis der Stand- und Funktionssicherheit des überwachten Objekts; Beitrag zur Gewährleistung eines störungsfreien Betriebs einer Anlage;
- rechtzeitiges Erfassen von Veränderungen („Frühwarnung“), um Gefährdungen für das Objekt sowie für die Umgebung zu vermeiden oder zu mindern;
- Beweissicherung zur Schadensdokumentation und zur Klärung der Ursachen von Schäden;
- Möglichkeit zur Prognose des mutmaßlichen Verhaltens in der Zukunft und unter Belastungsfällen;
- Überprüfung von Konstruktions- und Materialeigenschaften mit dem Ziel der Verbesserung der mechanischen Modellvorstellung des Objekts;
- (Wissenschaftlicher) Erkenntnisgewinn für vergleichbare Objekte.

Heutzutage typische Überwachungssysteme, bestehend aus meist sehr teuren, hochgenauen und wenig kompakten Sensoren im Verbund geschaltet, sowie Datenloggern und einer Dateninfrastruktur, erfordern zumeist Expertenwissen zur Unterhaltung, wodurch diese Art von Überwachung besonderen Überwachungsobjekten vorbehalten ist. Jedoch erfordern auch andere Überwachungsobjekte mit erhöhtem Risikopotenzial eine sensorbasierte Überwachung, da die Gefährdung von Nutzern und wirtschaftliche Schädigungen durch

Ausfallkosten nicht hinnehmbar sind. Dieser Umstand führt zu einem gesteigerten Bedarf nach kostengünstigen und einfach zu unterhaltenden Überwachungskonzepten, welche den aktuellen Trend in der Geodäsie in Richtung von alternativen und Low-Cost-Lösungen widerspiegeln. Beispiele von Versagen kritischer Bauwerksstruktur in Verbindung mit einem fehlenden Überwachungskonzept mit Echtzeitalarmierung treten tragischerweise immer wieder auf. Zu nennen sind exemplarisch der Einsturz der Bad Reichenhaller Eislaufhalle am 2. Januar 2006 infolge nicht erkannter Schäden in Verbindung mit hohen Schneelasten mit 15 Todesopfern, der Einsturz des Kölner Stadtarchivs am 3. März 2009 mit zwei Todesopfern oder der kürzliche Einsturz der Carolabrücke in Dresden am 11. September 2024 (siehe Abbildung 1.2) um nur einige deutsche Beispiele zu nennen. Die Einsturzursache der Carolabrücke lag hauptsächlich in der Korrosion der Spannstähle durch Feuchtigkeitseintrag während der Bauphase, verletzt wurde durch den Einsturz niemand. Genannte Beispiele beziehen sich lediglich auf den deutschen Raum, eventuell hätte das baldige Versagen der Bauwerksstruktur durch umfassende Überwachungskonzepte frühzeitig erkannt werden können und Schäden an menschlichem Leben sowie finanzielle Schäden vermieden werden können. Dieser Umstand liefert ein hohes Maß an Motivation sowohl für den Inhalt dieser Masterthesis als auch für die Weiterentwicklung ingenieurgeodätischer Überwachungskonzepte im Allgemeinen.



*Abbildung 1.2:* Am 11.09.2024 teilweise eingestürzte Carolabrücke in Dresden [Bybbisch94, 2024]

Innerhalb des Fachgebiets der geodätischen Überwachungsmessungen ist die Zeitreihenanalyse in Form von spektralen Analysen mit Integraltransformationen als Sonderfall zur Überwachung periodischer Schwingungsvorgänge einzuordnen. Dieser Umstand stellt einen Spezialfall dar, da die zu detektierenden Deformationsvorgänge periodisch stattfinden müssen, um wahrheitsgemäße und interpretierbare Ergebnisse zu erhalten. Hierzu folgen umfassende Ausführungen in Kapitel 3. Beispiele für solche Vorgänge sind der Tagessgang eines Turms in Folge von Wärmeeinleitung in das Bauwerk durch Sonnenstrahlung, Schwingungen eines Kirchturms durch das Läuten der Glocken, Vibrationsanalysen

im Zusammenhang mit Baumaßnahmen im Bestand oder Analysen von Bewegungen eines Motorblocks in Abhängigkeit der Motordrehzahl. Weitere Beispiele für Zeitreihen aus nicht-geodätischen Bereichen folgen in [Kapitel 2.2](#), für Zeitreihen aus der Geodäsie und deren Analyse wird auf [Kapitel 2.3](#) verwiesen.

Die vorliegende Masterthesis baut auf der Bachelorthesis [Vollert, 2022] auf und versucht, die Schwächen der dort behandelten Fast-Fourier-Transformation aufzuzeigen und durch Verwendung der Kurzzeit-Fourier-Transformation beziehungsweise der Gabor-Transformation, auszugleichen.

Die [Kurzzeit-Fourier-Transformation](#) (im weiteren Verlauf als „STFT“ bezeichnet) kann als Weiterentwicklung beziehungsweise Modifikation der [Fast-Fourier-Transformation](#) (im weiteren Verlauf „FFT“) bezeichnet werden. Vereinfacht dargestellt wertet die STFT nicht über einen fixen, vom Anwender gewählten Zeitraum der Zeitreihe aus, sondern schiebt ein Fenster mit einer gewählten Breite mithilfe eines Verschiebungspfades entlang der Zeitachse über die gesamte Zeitreihe. Dadurch wird der Auswertezzeitpunkt beziehungsweise die Zeit als dritte Größe neben der Amplitude und Frequenz des analysierten Signals in der Ergebnisdarstellung eingeführt. In der Ergebnisdarstellung der FFT, dem Amplitudenspektrum, werden lediglich die Amplitude und Frequenz des analysierten Signals dargestellt. Für das für die STFT notwendige Auswertefenster können verschiedene Fensterfunktionen gewählt werden, um Messwerte am Anfang oder am Ende des Auswertefensters zu dämpfen oder auszuschließen, vergleichbar mit einer Filterfunktion. Die Verwendung einer Fensterfunktion behebt den spektralen „Leakage-Effekt“ im Frequenzbereich; auf diesen Umstand wird in [Kapitel 2.4.8](#) eingegangen. Wird in einem speziellen Fall die Gaußfunktion als Fensterfunktion gewählt, so handelt es sich um die spezielle [Gabor-Transformation](#), mit welcher sich diese Arbeit in besonderer Weise auseinandersetzt.

Die STFT stellt eine Möglichkeit zur Auswertung von Zeitreihen dar, die so in der Geodäsie bisher kaum Anwendung findet, was ein hohes Maß an Motivation für diese Arbeit bietet und dem Thema Aktualität verleiht. Die STFT bietet im Gegensatz zur FFT die Möglichkeit zur wirklich zeitbezogenen Auswertung und Darstellung von Messdaten beziehungsweise Zeitreihen, da sie den Spektralkomponenten Zeitintervalle zuweist und gewährleistet somit eine effizientere Verarbeitung und Interpretation von Massendaten. Je nach Anwendungsfall muss bei Verwendung der STFT eine Entscheidung für eine höhere Zeitauflösung oder eine höhere Frequenzauflösung in der Berechnung und Ergebnisdarstellung getroffen werden; [auf diesen Umstand wird an anderer Stelle dieser Arbeit](#) detailliert eingegangen. Auch werden die verschiedenen Fensterfunktionen, die zur Dämpfung und Filterung verwendet werden können, detailliert beleuchtet, ein besonderes Augenmerk liegt hierbei auf der Gaußfunktion als Fensterfunktion für die Gabor-Transformation.

Eine große Schwäche der FFT liegt in dem Umstand, dass die Amplitude eines Signals falsch dargestellt wird, wenn dieses Signal nicht konstant über das gesamte Auswertefenster vorhanden ist. Die Falschdarstellung der Amplitude (bsp. geometrische Bewegung am Bauwerk) bietet ein hohes Gefahrenpotenzial, wenn die Bewegung größer ist als durch die FFT ermittelt und somit eine nötige Alarmierung verschlafen wird. Diese Problematik behebt die Funktionsweise der STFT vollständig.

## 2 Zeitreihenanalyse

„Prediction is very difficult, especially if it's about the future.“

---

(Niels Bohr, 1865 - 1962)

Das nachfolgende Kapitel beschäftigt sich mit der Analyse von Zeitreihen und liefert Beispiele aus der geodätischen und nicht-geodätischen Praxis, um eine Einführung in die Thematik zu gewährleisten. Weiterführend werden Eigenschaften von Zeitreihen behandelt, deren Erfüllung notwendig ist, um wahrheitsgemäße und richtige Ergebnisse im Rahmen der Zeitreihenanalyse zu erhalten.

Die Zeitreihenanalyse beschäftigt sich allgemein formuliert mit der Beschreibung und Modellierung, sowie der zeitlichen Entwicklung eines oder mehrerer Merkmale beziehungsweise Kennzahlen. Sie ist eine Verschmelzung aus mehreren Disziplinen aus den Bereichen der Stochastik und Statistik, der Mathematik und der angewandten Signaltheorie und wird hauptsächlich zur Darstellung, Analyse und Estimation beziehungsweise Prognose von Verläufen von Signalen genutzt.

Betrachtet man das Gebiet der Wirtschaftswissenschaften, so ist die Zeitreihenanalyse ein integraler Bestandteil jeder angewandten ökonomischen Theorie mit der Zielstellung, ein fundamentales Verständnis von ökonomischen Kennzahlen wie Inflationsraten, Bruttoinlandsprodukten, Zinssätzen oder Aktienkursen zu gewinnen [Neusser u. Wagner, 2022].

Auch in der Soziologie, sowie weiteren Fachdisziplinen wird die Zeitreihenanalyse als Werkzeug zur Auswertung zeitbezogener Daten angewendet; für Beispiele wird auf [Kapitel 2.2](#) verwiesen.

[Shumway u. Stoffer, 2011] nimmt eine Unterteilung der Zeitreihenanalyse in drei verschiedene Ansätze vor:

1. *Ansatz auf Basis von Übertragungsfunktionen:*

Dieser Ansatz zielt darauf ab, eine Klasse geeigneter Modelle zu entwickeln, die das zu beobachtende System anhand der zur Verfügung stehenden Informationen beschreiben. Die interne Dynamik des Systems wird bei diesem Ansatz nicht berücksichtigt. Verwendung findet dieser Ansatz in der Verfahrenstechnik. Dort stellt er eine der Hauptformen der Modellierung in der Prozessleittechnik dar.

2. *Ansatz auf Basis des Zustandsraums:*

Der zustandsraumbasierte Ansatz ist darauf ausgerichtet ein Verständnis der internen Prozessdynamik zu entwickeln, mit der das zukünftige Verhalten des Systems prognostiziert werden kann. Hierfür wird bei diesem Ansatz das Kalman-Filter in die Entwicklung von geeigneten Parameterschätzungen einbezogen. Der Ansatz basiert auf der Arbeit von Rudolf Emil Kálmán im Zusammenhang der Entwicklung einer neuen Methode zum Umgang mit Zeitreihendaten welche in den beiden Artikeln [Kalman, 1960] und [Kalman u. Bucy, 1961] erstmals veröffentlicht wurden. Dieser Ansatz findet wiederum in der Verfahrenstechnik eine breite Nutzung, bedingt durch das hohe Potenzial komplexe Prozessdynamiken zu beherrschen.

### 3. Ansatz auf Basis des Frequenzbereichs:

Dieser Ansatz zielt darauf ab, Erkenntnisse über den analysierten Prozess im Frequenzbereich durch Anwendung entsprechender Methoden und Analysen zu erlangen. Bei der Frequenzbereichsanalyse werden häufig Fourier-Analysen und Transformationen verwendet um interessante Frequenzinformation in den analysierten Datensätzen hervorzuheben die oftmals ohne die vorangegangene Analyse nicht sichtbar wären.

Der Inhalt dieser Arbeit und das Fachgebiet der Geodäsie im Allgemeinen beschäftigen sich hauptsächlich mit dem dritten Ansatz der Zeitreihenanalyse, mit dem Ansatz auf Basis des Frequenzbereichs.

## 2.1 Definition Zeitreihe

Versucht man eine wissenschaftliche Definition für eine Zeitreihe zu finden, so stößt man, abhängig von dem Fachgebiet, in dem eine Zeitreihenanalyse praktiziert wird, auf verschiedene Ansichten in der einschlägigen Fachliteratur. Allen zugrunde liegt jedoch die Aussage, dass eine Zeitreihe aus geordneten, streng zeitabhängigen Daten besteht. Da sich diese Arbeit jedoch mit der Auswertung geodätischer Zeitreihen in der Bauwerksüberwachung beschäftigt, ist eine mathematisch-technische Definition für eine Zeitreihe zu wählen. Hierfür muss zunächst die Begrifflichkeit der stochastischen Prozesse vollumfänglich erklärt werden, da diese eng mit dem Begriff der Zeitreihe verbunden ist.

Zunächst wird eine Beobachtung zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t$  als Realisierung einer Zufallsvariablen  $X_t$  angenommen. Oftmals ist jedoch ein zeitabhängiger Prozess mit mehreren Zeitpunkten von Interesse, sodass dieser als Realisation einer Menge von Zufallsvariablen betrachtet werden kann, wobei der Zeitindex  $t$  bestimmte Zeitpunkte aus einer Menge  $\mathcal{T}$  durchläuft. Dies führt zur folgenden Definition nach [Neusser u. Wagner, 2022]:

*Ein stochastischer Prozess  $\{X_t\}_{t \in \mathcal{T}}$  ist eine mit  $t \in \mathcal{T}$  indexierte Folge von reellwertigen Zufallsvariablen  $X_t$  die alle auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum definiert sind.*

Dabei bezeichnet  $\mathcal{T}$  eine geordnete Indexmenge, üblicherweise die Zeit. Unter anderem werden folgende Indexmengen definiert:

diskrete Zeit:  $\mathcal{T} = \{1, 2, \dots\} = \mathbb{N}$ ,

diskrete Zeit:  $\mathcal{T} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{Z}$ ,

stetige Zeit:  $\mathcal{T} = [0, \infty) = \mathbb{R}^+$  bzw.  $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ .

Aufgrund der diskreten Eigenschaft von Prozessen in der Geodäsie und deren Beobachtungen kann auf eine stetige Betrachtung von stochastischen Prozessen an dieser Stelle verzichtet werden. Erwähnenswert im Zusammenhang mit der Zeit ist, dass die Indexmenge  $\mathcal{T}$  geordnet ist und somit eine zeitliche Richtung aufweist. Nachdem der Begriff des stochastischen Prozesses sowie dessen Eigenschaften wie die Abhängigkeit vom Zufall und einer zeitlichen Ordnung festgelegt ist, kann der Begriff der Zeitreihe definiert werden. Der stochastische Prozess bildet das Fundament der Zeitreihe:

*Die Funktion  $t \rightarrow x_t$ , welche jedem Zeitpunkt  $t$  die Realisation von  $X_t$ , bezeichnet mit  $x_t$ , zuweist heißt „Realisation“ oder „Trajektorie“ des stochastischen Prozesses. Sie wird mit  $\{x_t\}$  bezeichnet und stellt die Zeitreihe dar.*

Der Begriff Zeitreihe wird häufig, wenn auch nicht immer präzise, sowohl für die Realisaton bzw. Trajektorie als auch für den zugrunde liegenden stochastischen Prozess verwendet. Streng genommen stellt die Trajektorie jedoch lediglich eine einzelne Realisation des zugrunde liegenden stochastischen Prozesses dar und repräsentiert somit eine spezifische Beobachtung innerhalb einer potenziell unendlichen Menge möglicher Verläufe.

Eine interessante und für den Inhalt dieser Arbeit wichtige Betrachtungsweise einer Zeitreihe liefern [Foppe u. Neitzel, 2014]. Dort wird das additiv Modell einer Zeitreihe beschrieben, nach dem sich eine Zeitreihe aus mehreren Komponenten zusammensetzt, dem Trend  $f_T(t)$ , einer zyklischen Komponente  $f_Z(t)$  und dem Rauschen  $u(t)$ , welche wie folgt beschrieben werden:

- Als Trend wird eine langfristige, systematische Zu- oder Abnahme des Verlaufs der Zeitreihe bezeichnet
- Als zyklische Komponente wird eine Schwankung im Verlauf der Zeitreihe bezeichnet, welche sich relativ unverändert in gleichen Zeitabständen wiederholt.
- Als Rauschen werden normalverteilte Änderungen der Messgröße bezeichnet, welche in der Regel durch zufällige Fehler bei der Datenerfassung hervorgerufen werden.

Es wird angenommen, dass sich die drei Komponenten additiv überlagern, was zum Modell der additiven Zeitreihe führt:

$$x(t) = f_T(t) + f_Z(t) + u(t) \quad (2.1)$$

Diese Anschauung ist hinsichtlich der Beschaffenheit von geodätischen Beobachtungen und Zeitreihen zutreffend und wird aus diesem Grund als Modell aufgegriffen und verwendet.

## 2.2 Beispiele für Zeitreihen in nicht-geodätischen Disziplinen und deren Auswertung

Die Zeitreihenanalyse und ihre zugrunde liegenden mathematischen Werkzeuge stammen ursprünglich aus dem Gebiet der Signalverarbeitung und Signalanalyse. Für die Signalanalyse werden dem interessierten Leser Quellen wie [Mertins, 2023], [Kroschel et al., 2011] oder [Hoffmann u. Wolff, 2014] empfohlen, die die Signalanalyse anschaulich, dennoch in anspruchsvoller und fortgeschritten Weise abhandeln. In der heutigen Zeit hat die praktische und angewandte Zeitreihenanalyse zum Teil Einzug in die Geodäsie erhalten, wobei sie dort immer noch eine Nische für Spezialanwendungen darstellt.

Auch andere Fachdisziplinen bedienen sich der Werkzeuge der Zeitreihenanalyse. Diese Fachgebiete und ihre Nutzung der Zeitreihenanalyse sollen in diesem Kapitel grob und beispielhaft dargestellt werden, um einen breiteren Überblick über die enorm vielfältigen Anwendungsmöglichkeiten zu geben.

Einen sehr bedeutenden Anwendungsbereich findet die Zeitreihenanalyse in den Wirtschaftswissenschaften. Dort beruht jede moderne, ökonomische Theorie auf Ansätzen aus der Zeitreihenanalyse. Sie ist bereits in alle Teilgebiete der Wirtschaftswissenschaften vorgedrungen und hat vor allem in der Makroökonomie und der Finanzmarktökonomie einen besonderen Stellenwert erreicht. Dieser Umstand ist historisch bedingt, da bereits früh damit begonnen wurde in diesen Gebieten systematisch Daten zu erheben. Für weitreichende Datenauswertung reicht eine einfache Betrachtung von Zeitreihen in Form von Tabellen oder Grafiken nicht aus; diese sind lediglich der erste Schritt einer umfassenden Analyse. Analysiert werden typischerweise wirtschaftswissenschaftliche Kennzahlen wie Inflationsraten, Aktienkurse, Zinssätze, Umsätze und Gewinne eines Unternehmens, Beschäftigungszahlen, Dynamiken auf dem Weltmarkt oder Bruttoinlandsprodukte. Sollen mehr als eine Zeitreihe gleichzeitig betrachtet werden, wie in den Wirtschaftswissenschaften oft üblich, so wird die multivariate Zeitreihenanalyse praktiziert [Neusser u. Wagner, 2022]. Ein praktisches Beispiel einer angewandten Zeitreihenanalyse wird in [Neusser u. Wagner, 2022, S. 95 ff.] mit der Modellierung des realen Bruttoinlandsprodukts der USA beschrieben.

Auch in der empirischen Sozialforschung wird auf die Zeitreihenanalyse zurückgegriffen. Untersuchungsgegenstand soziologischer Zeitreihen können beispielsweise monatliche Arbeitslosendaten sein, jährliche Kriminalitätsraten, die Entwicklung von Rauschgiftdelikten, die Analyse von Verhalten bestimmter gesellschaftlicher Gruppen oder das Verhalten von einzelnen Personen, zum Beispiel in Bezug auf das Maß an Zeit, das mit Arbeit, Freizeit und mit Freunden verbracht wird. Zeitreihen in der Sozialforschung sind zumeist eine spezielle Art von Längsschnittdaten [Metz u. Thome, 2022].

Ein Phänomen, dessen Analyse das tägliche Leben in erheblichem Maße beeinflusst, ist das Wetter und die damit verbundene Meteorologie. Die zeitabhängigen Größen meteorologischer Beobachtungen und Messungen können stets als Reihenentwicklungen orthogonaler Funktionen dargestellt werden, die mit den Werkzeugen der Zeitreihenanalyse

ausgewertet werden. So spielen diese eine wichtige Rolle, um klimatische Muster zu identifizieren, Wettervorhersagen zu verbessern und langfristige Klimaentwicklungen zu untersuchen. Beispiele meteorologischer Zeitreihen sind Temperaturentwicklungen, Niederschlagsmengen, Windgeschwindigkeiten, Sonneneinstrahlungsraten, Luftdrücke und Partikelverteilungen sowie Zusammensetzungen in der Atmosphäre. Verwendete Werkzeuge sind hierbei die Fourier-Analyse zur Vorhersage periodischer Klimazyklen, „*Exponential Smoothing (ETS)*“ für kurzfristige Wetterprognosen, GARCH-Modelle zur Modellierung extremer Wettervariation oder Markov-Ketten zur Modellierung von Wetterzuständen. [Foken u. Mauder, 2024, S. 131 ff.] liefert anschauliche Beispiele zur Auswertung meteorologischer Zeitreihen, wie etwa die Analyse der Vertikalwindstruktur über einem Wald mit Hilfe der Wavelet-Transformation. Gegenstand aktueller Forschungen ist die Behebung von Störeinflüssen auf Wetterradardaten, hervorgerufen durch Windenergieanlagen. Das Verbundvorhaben „*RIWER - Removing the Influence of Wind-Park-Echoes in Weather-Radar-Measurements*“ hat sich mit der Identifikation und Modellierung von gestörten Daten durch sog. „*Gap-Infilling-Algorithmen*“ mit Werkzeugen der Signal- und Zeitreihenanalyse wie der Gabor- und der Wavelet-Transformation beschäftigt [Teschke et al., 2024].

In der Medizin wird die Zeitreihenanalyse im Kontext der Auswertung von EKG- und EEG-Signalen verwendet. In der Kardiologie beispielsweise wird die Herzaktivität als zeitliche Abfolge elektrischer Signale erfasst und mit der Spektralanalyse ausgewertet. Die Fourier-Transformation wird hierbei zur Untersuchung der Frequenzkomponenten der Herzfrequenzvariabilität verwendet. Die Wavelet-Transformation wird zur Detektion von abrupten Änderungen der Herzfrequenz wie dem Vorhofflimmern eingesetzt. Auch das Elektroenzephalogramm (EEG), welches zur Analyse von Gehirnaktivitäten verwendet wird, nutzt die Spektralanalyse zur Untersuchung von beispielsweise Schlafmustern, Epilepsie oder Bewusstseinszuständen. Fourier- und Wavelet-Transformationen liefern Ergebnisse zur Untersuchung von Alpha-, Beta- und Gamma-Wellen, sog. „*Hidden-Markov-Models*“, dienen der Erkennung von Übergängen zwischen Wach-, REM- und Tiefschlafphasen. Zudem werden auch Werkzeuge wie die Kreuzkorrelation eingesetzt, um beispielsweise Abhängigkeiten zwischen Blutdruck und anderen Variablen wie Stress und Medikamenteneinnahme zu untersuchen.

Weitere Beispiele sind die Auswertung von Daten, erfasst von Seismografen, in der Erdbebenforschung, oder die digitale Bildverarbeitung, in der die Fourier-Transformation zur Komprimierung von Bildern verwendet wird, um geringere Dateigrößen zu erreichen. Vereinfacht dargestellt wird die Pixelmatrix eines Bildes in einen Zeilenvektor umgewandelt, über den eine Fourier-Transformation angewendet wird; die Fourier-Koeffizienten stellen die Pixelwerte beziehungsweise den Farbverlauf des Bildes dar. Speicherplatz einsparungen werden erreicht, indem nur einige der errechneten Fourier-Koeffizienten gespeichert werden.

## 2.3 Beispiele für Zeitreihen in der Geodäsie und deren Auswertung

Die Zeitreihenanalyse findet Anwendung in einigen Teilbereichen der Geodäsie. Vor allem in der Bauwerksüberwachung wird Zeitreihenanalyse praktiziert, weitere Beispiele sind in der Fernerkundung, der GNSS-Messung, der Modellierung der Atmosphäre und Ionosphäre sowie der Bestimmung der Erdgestalt und deren Variation zu finden. Die Frequenzen der Signale, die durch die Zeitreihenanalyse aufgedeckt werden sollen, variieren dabei stark. Während Zeitreihen in der Fernerkundung Veränderungen über Monate oder gar Jahre enthalten (Niedrigfrequenzbereich) werden in der Bauwerksüberwachung Schwingungen im niedrigen, einstelligen Hertzbereich (Mittelfrequenzbereich) untersucht. Darüber hinaus wird der Bereich mittlerer Frequenzen durch beispielsweise die Untersuchung von Vibrationen in Fertigungsprozessen oder in der Automobilindustrie erweitert. Die Vibrationen, die durch die Leerlaufdrehzahl eines Automotors hervorgerufen werden, liegen im Bereich von  $600 \text{ min}^{-1}$  bis  $1000 \text{ min}^{-1}$ , das entspricht 10 Hz bis 16 Hz. Im oberen Bereich des Frequenzspektrums finden sich innerhalb der geodätischen Zeitreihenanalyse Anwendungen wie die Auswertung von Echolotsignalen im Rahmen von Peilungen, Seekartierungen und Meeresforschung. Die Frequenz der Echolotsignale liegt üblicherweise im Bereich von 10 kHz bis 200 kHz (Hochfrequenzbereich). Die Beispiele von geodätischen Zeitreihen und deren Auswertung sind sehr vielfältig, es soll an dieser Stelle ein kleiner Überblick über die besonders interessanten Beispiele geliefert werden:

- *Bauwerksüberwachung*: Analyse von Schwingungen und Deformationen in Bausubstanzen durch Bauen im Bestand, Analyse von Tagesgängen von Bauwerken hervorgerufen durch Wärmeeinleitung in Folge von Sonnenstrahlung, Analyse von Deformationen hervorgerufen durch Windlasten.
- *Landesvermessung*: Veränderung von Lage- und Höhennetzen und deren Realisierungen, den Lage- und Höhenfestpunkten, Messung von Referenzpegeln.
- *Industrievermessung*: Analyse von Deformationen in einer Fertigungsanlage durch Vibrationen im Fertigungsprozess.
- *Fernerkundung*: Veränderung des Permafrostbodens oder von Eisgebilden in der Arktis durch Auswertung von Zeitreihen aus Daten der Radarfernerkundung, Satellitenaltimetrie oder inSAR-Daten, Entwicklung von Waldbeständen durch Auswertung von NDVI-Zeitreihen, Entwicklung von Meeresoberflächentemperaturen.
- *Erdvermessung*: Veränderung von Nutation und Präzession (Veränderung der Erdrotationsachse) über die Zeit, Überwachung von Plattenbewegungen und Kontinentaldriften durch beispielsweise VLBI, Erdmagnetfeldvariationen.

In den vielfältigen Beispielen, in denen innerhalb der Geodäsie Zeitreihenanalyse praktiziert wird, kommen vorwiegend Werkzeuge wie Korrelationsanalysen (Auto- und Kreuzkorrelation), Fourier-Analyse und -Transformation, Wavelet-Analyse und -Transformation sowie Varianzanalysen zu Zeitreihen zum Einsatz. Einige dieser Methoden sind Kerninhalte dieser Arbeit und werden in nachfolgenden Kapiteln detaillierter behandelt.

## 2.4 Voraussetzungen für die Auswertbarkeit von Zeitreihen

Damit eine Zeitreihe mit Mitteln der Spektralanalyse hinsichtlich im Signal enthaltenen Frequenzen und Amplituden korrekt oder überhaupt ausgewertet werden kann, muss eine Reihe von Voraussetzungen erfüllt sein. Vor der Auswertung einer Zeitreihe durch beispielsweise die Fourier-Analyse ist es empfehlenswert, die Zeitreihe vorab auf die in den nachfolgenden Unterkapiteln beschriebenen Eigenschaften zu überprüfen. Werden diese nicht oder nicht hinreichend beachtet, so kann keine korrekte Auswertung der Zeitreihe gewährleistet werden.

### 2.4.1 Stationarität

Vereinfacht dargestellt ist eine Zeitreihe stationär, wenn sie über ihren Verlauf unveränderlich hinsichtlich ihres Erwartungswerts bleibt, sich somit ihr Mittelwert und ihre Varianz über die Zeit nicht ändern, ihr stochastisches Verhalten ist gleichbleibend. Darüber hinaus wird zwischen **schwacher Stationarität** und **strenger Stationarität** unterschieden [Shardt u. Weiß, 2021]. Stationarität ist eine wichtige Eigenschaft, deren Erfüllung maßgebliche Bedeutung hat, wenn im Rahmen einer Zeitreihenanalyse korrekte und wahrheitsgemäße Ergebnisse erreicht werden sollen.

*Eine Zeitreihe wird als **streng stationär** bezeichnet, wenn das probabilistische Verhalten (Verteilungs- und Dichtefunktionen) einer jeden Teilmenge von Stichproben aus der Realisation des stochastischen Prozesses  $\{x_t, x_{t+1}, \dots, x_{t+j}\}$  mit der zeitversetzten Menge  $\{x_{t+k}, x_{t+k+1}, \dots, x_{t+k+j}\}$  identisch ist:*

$$P(x_t < c_1, \dots, x_{t+j} < c_j) = P(x_{t+k} < c_1, \dots, x_{t+k+j} < c_j), \quad (2.2)$$

gültig ist dies für alle  $j = 1; 2; \dots$ ; alle Zeitpunkte  $t = t_1; t_2; \dots$ ; alle Konstanten  $c_1; c_2; \dots; c_j$  und alle Verschiebungen  $k = 0; 1; 2; \dots$ .

Dies bedeutet, dass die Verteilungsfunktion und Dichtefunktion der Variablen zu jedem Zeitpunkt gleich sind, somit alle statistischen Eigenschaften gleich sind. In der Praxis kann die Feststellung der strengen Stationarität für einen stochastischen Prozess allerdings schwierig sein. Aus diesem Grund wurde eine schwächere Formulierung eingeführt, die nur die ersten beiden Momente einschränkt:

*Eine Zeitreihe wird als **schwach stationär** bezeichnet, wenn [Shardt u. Weiß, 2021]:*

1. Die Zeitreihe eine endliche Varianz besitzt.
2. Der Mittelwert der Zeitreihe konstant und unabhängig von der Zeit ist, sodass  $\mu = E(x_t)$
3. Die Autokovarianzfunktion unabhängig von der Zeit ist.

Wenn nicht anders angegeben, ist bei Verwendung eines als stationär deklarierten Signals von schwacher Stationarität auszugehen. Für die meisten Anwendungen, so auch die in dieser Arbeit praktizierte Zeitreihenanalyse, ist dies ausreichend.

## 2.4.2 Ergodizität

Der Begriff „Ergodizität“ stammt aus den Ergoden-Sätzen von 1931/1932. Physikalische Systeme, bei denen zeitliche Mittelwerte von Parametern gegen die Ensemble-Mittel konvergieren, werden ergodisch genannt. Für einen stochastischen Prozess bedeutet dies, dass, wenn bei der Berechnung von Erwartungswert und Autokovarianzfunktion das Ensemble-Mittel (oder auch transversale Mittel) durch ein Zeitmittel ersetzt werden kann, von einem ergodischen, stationären Prozess gesprochen werden kann. Dies geschieht auf Grundlage lediglich einer Musterfunktion. Eine Folge daraus ist, dass eine Zeitreihe  $\{x_t\}$  ergodisch ist, wenn von ihr auf eine andere Zeitreihe  $\{y_t\}$  geschlossen werden kann [Neuner u. Foppe, 2009].

Bei tieferer Betrachtung dieses Umstandes wurde vorausgesetzt, dass bei der Berechnung der Bestimmungsstücke eines stochastischen Prozesses wie dem Mittelwert oder der Kovarianzfunktion die Dichtefunktion bekannt ist. Notwendig ist dies, da in der Dichtefunktion die Informationen über alle Musterfunktionen, welche in ihrer Gesamtheit den stochastischen Prozess beschreiben, enthalten sind. In der Praxis ist dies jedoch problematisch, da oft nur *eine* Musterfunktion bekannt ist. Deshalb muss von der Hypothese ausgegangen werden, dass das verfügbare Messsignal, die *eine* bekannte Musterfunktion also, den gesamten Prozess repräsentiert. Es wird in diesem Fall von der *Ergodenhypothese* gesprochen, welche nur für stationäre Prozesse gelten kann. Mit der Stationarität als erste Spezialisierung, ist die Ergodizität die zweite Spezialisierung, die notwendig ist, um in der technischen Praxis statistische Verfahren anwenden zu können. Es handelt sich um eine Hypothese, da nicht bewiesen werden kann, dass die eine verfügbare Musterfunktion den gesamten Prozess repräsentiert, so dass aus ihr alle den Prozess beschreibenden statistischen Parameter extrahiert werden können. Bei Gültigkeit der Ergodenhypothese gilt somit für den Mittelwert eines stochastischen Prozesses  $X(k)$  mit der Realisation  $x(k)$  [Kroschel et al., 2011]:

$$\mu_X = E\{X\} = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{2K + 1} \sum_{k=-K}^K x(k), \quad (2.3)$$

für die Varianz des stochastischen Prozesses:

$$\sigma_X^2 = E\{(X - \mu_X)^2\} = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{2K + 1} \sum_{k=-K}^K x^2(k) - \mu_X^2, \quad (2.4)$$

und für die Kreuzkorrelationsfunktion des stochastischen Prozesses:

$$r_{XY}(\kappa) = E\{X(k) \cdot Y(k - \kappa)\} = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{2K + 1} \sum_{k=-K}^K x(k) \cdot y(k - \kappa). \quad (2.5)$$

### 2.4.3 Zentrierung

Eine Zentrierung der Zeitreihe beziehungsweise Realisation  $x(k)$  des stochastischen Prozesses  $X(k)$  wird notwendig, weil diese ein unerwünschtes Offset enthält - kein Sensor startet so, dass der Mittelwert seines erfassten Datensatzes exakt bei Null liegt. Ein Beispiel hierfür kann die Betrachtung von Beschleunigungswerten in Z-Achse sein, welche durch einen Beschleunigungssensor erfasst wurden, deren gemessene Werte der kinematischen Beschleunigung entlang der Z-Achse einen Offset in Höhe der örtlich wirkenden Schwerbeschleunigung von  $\sim 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  enthalten. Die gesamte Zeitreihe kann zur Behebung um dieses Offset reduziert werden. Eine weitere Möglichkeit der Zentrierung bietet das Reduzieren um den Mittelwert der Zeitreihe, sofern diese mindestens schwach stationär ist, das heißt, ihr Mittelwert über die Zeit konstant ist. Ist dies nicht der Fall, muss zunächst der in der Zeitreihe enthaltene Trend behandelt werden.

### 2.4.4 Trendbefreiung

Langfristige Trends sind häufig auftretende Merkmale von Zeitreihen in geowissenschaftlichen und messtechnischen Daten. Gründe dafür können in den Beschaffenheiten von Sensoren allgemein begründet sein, beispielsweise sind die Daten von Beschleunigungssensoren auf MEMS-Basis aus dem Low-Cost- und Consumer-Bereich mit starken Driften behaftet, da diese im Formfaktor sehr klein und extrem kostengünstig produziert werden. Sensorbasierte Driften sind oft stark temperaturabhängig und können beziehungsweise sollten durch Kalibrieransätze behoben werden. Üblich sind hierbei Kalibrieransätze auf Basis der Methode der Minimierung der Verbesserungsquadratsumme, also der Ausgleichsrechnung.

Trends in Zeitreihen können linear auftreten, in Form von quadratischen oder kubischen Funktionen oder in seltenen Fällen als Polynomfunktionen höherer Ordnung. Zumeist wird in Vorbereitung der Auswertung einer Zeitreihe ein linearer Trend ermittelt und die Zeitreihe von diesem Trend befreit. Sollte ein vorliegender linearer Trend nicht behandelt werden, so wird dieser von beispielsweise der Fourier-Analyse als sehr lange Periode mit sehr niedriger Frequenz interpretiert. Bei Anwendung der Fast-Fourier-Transformation tritt demnach im Amplitudenspektrum ein Peak mit sehr hohem Energieniveau bei einer Frequenz nahe null auf. Anschaulich mit Beispielen auf Basis von Matlab-Skripten wird dieser Umstand in [Trauth, 2022, S. 202 ff.] beschrieben. An dieser Stelle soll anhand eigens simulierter Daten der Einfluss von trendbehafteten Daten verdeutlicht werden. Zunächst wird eine Sinusschwingung mit hoher Abtastrate und einer Frequenz von  $f = 5\text{Hz}$  und einer Amplitude von  $A = 0,5$  simuliert ([Abbildung 2.1](#))

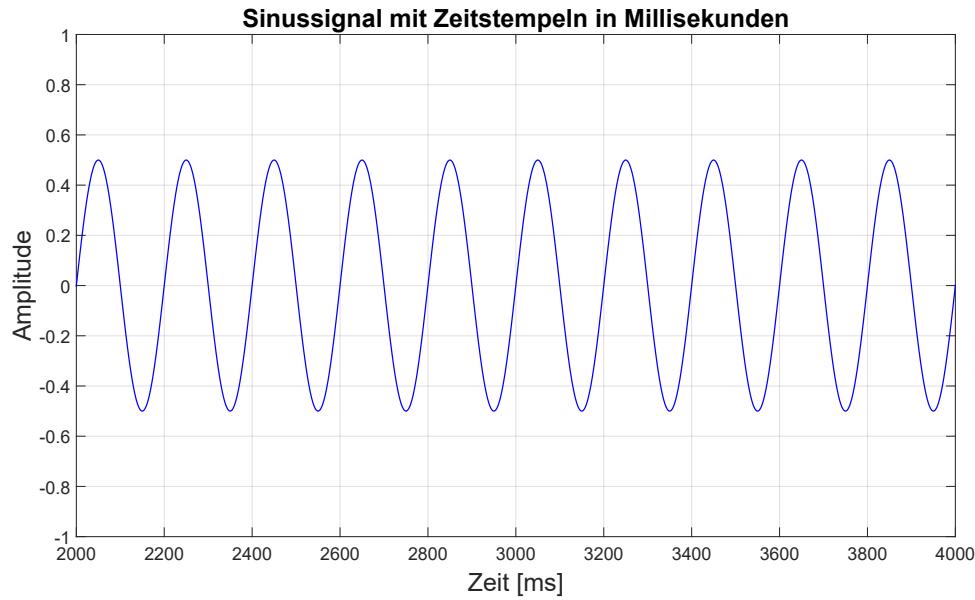


Abbildung 2.1: Simulierte Daten: Sinusschwingung mit  $f = 5\text{Hz}$ ,  $A = 0,5$

Die simulierte Sinusschwingung wird nun normalverteilt mit einer Standardabweichung von  $s = 0,6$  verrauscht ([Abbildung 2.2](#)).

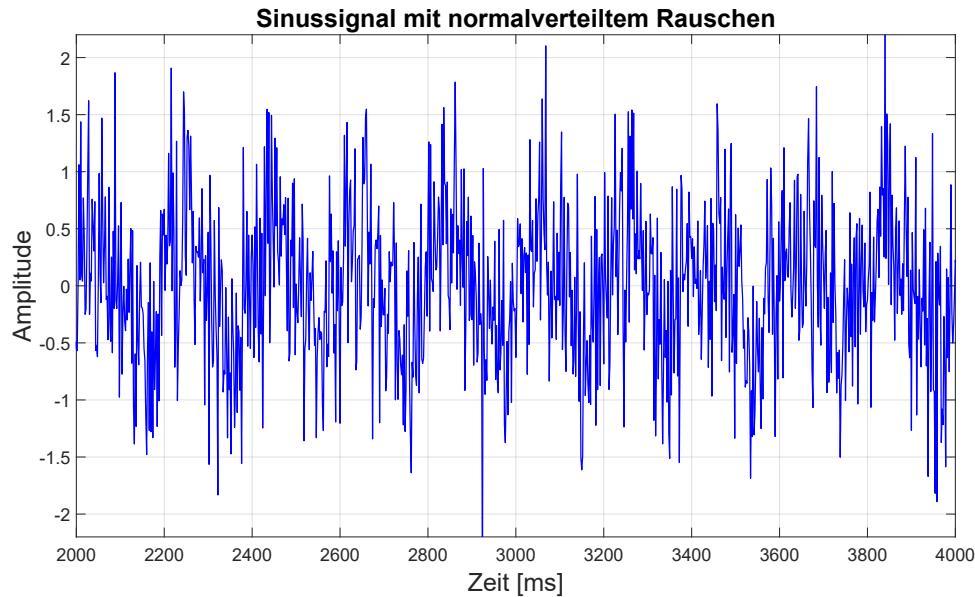


Abbildung 2.2: Simulierte Daten: Sinusschwingung mit normalverteiltem Rauschen  $s = 0,6$

Den verrauschten Daten wird im Anschluss ein linearer Trend mit einem Offset von  $b = 0,15$  und einem Maßstabsfaktor von  $m = 0,2$  hinzugefügt ([Abbildung 2.3](#)).

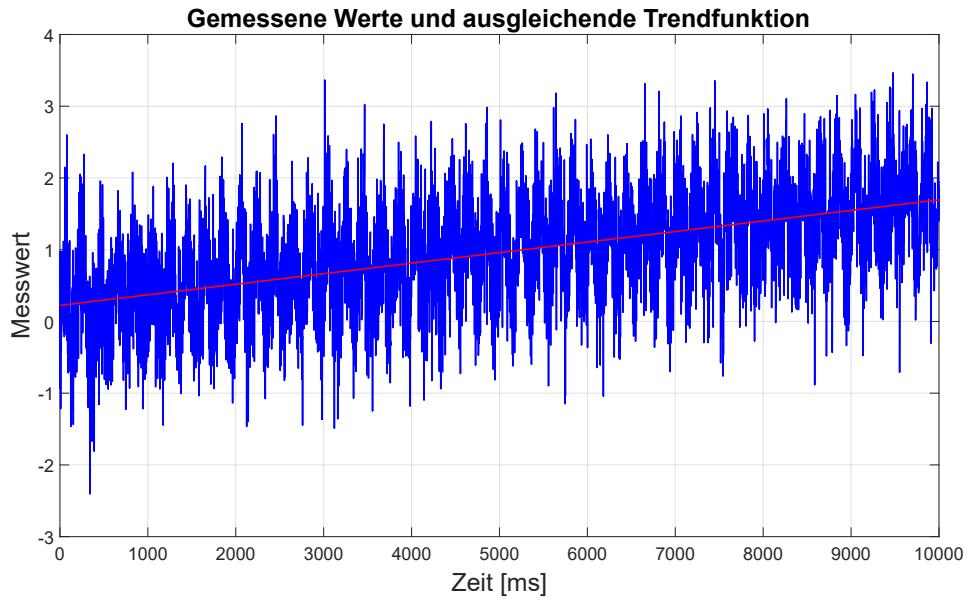


Abbildung 2.3: Simulierte Daten: Sinusschwingung mit linearem Trend  $b = 0,15$ ,  $m = 0,2$

Wird nun auf die linear trendbehafteten Daten eine [Fast-Fourier-Transformation](#) angewendet, so interpretiert diese den linearen Trend als eine Schwingung mit extrem langer Periode beziehungsweise extrem niedriger Frequenz. Ersichtlich wird dies im Amplitudenspektrum. Hier ist der lineare Trend deutlich als Peak mit einer Frequenz nahe null Hertz sichtbar. Der lineare Trend liefert sogar eine Amplitude in der gleichen Größenordnung wie die Amplitude des Nutzsignals ([Abbildung 2.4](#)).

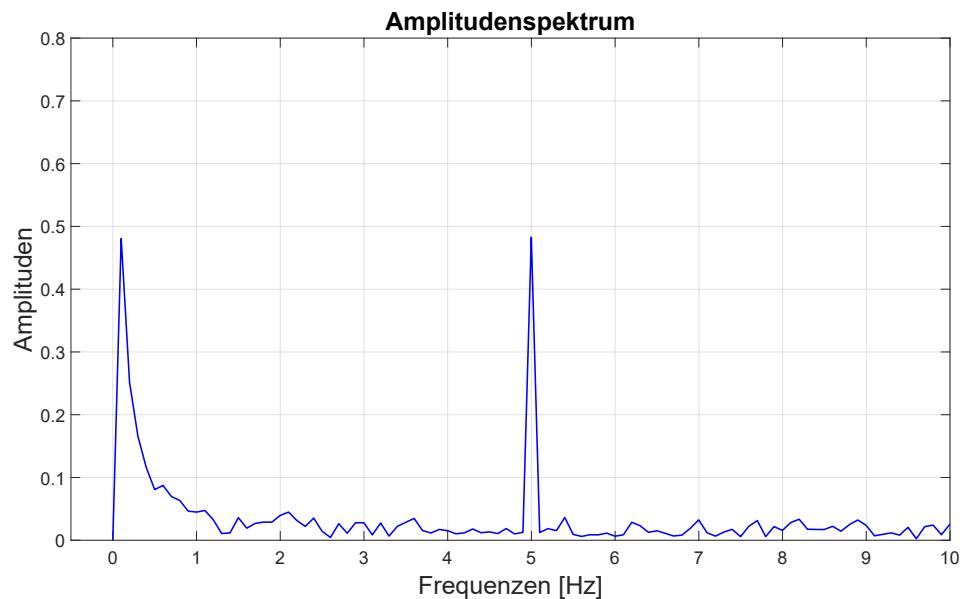


Abbildung 2.4: Simulierte Daten: Amplitudenspektrum der Sinusschwingung mit linearem Trend  $b = 0,15$ ,  $m = 0,2$

Für die Abspaltung und Beseitigung von Trends in Zeitreihen gibt es mehrere Ansätze. Regressionsansätze, sowohl linearer als auch polynomialer Natur, können stets als Ausgleichungsproblem nach der Methode der Minimierung der Verbesserungsquadratsumme behandelt werden. Vorteilhaft ist hierbei, dass durch die Ausgabe der Qualitätsparameter der Ausgleichungsrechnung die ermittelten Parameter der Trendfunktion mittels statistischem Test auf Signifikanz geprüft werden können. Auf die Regressionsansätze zur Ermittlung einer Trendfunktion soll an dieser Stelle nicht weiter eingegangen werden, hierfür wird auf die einschlägige Fachliteratur wie [Bourier, 2022], [Becker et al., 2024] oder [Shardt u. Weiß, 2021] verwiesen. Beispielsweise zu nennen sind die gewöhnliche oder gewichtete Kleinsten-Quadrat-Regression für lineare Trends oder das Gauß-Newton-Verfahren für nichtlineare Regression.

Im Beispiel der simulierten Daten wurde ein linearer Trend mit einem Offset und einem Maßstab (rot) ermittelt und von dem Signal abgezogen (grün), wie in Abbildung 2.5 ersichtlich.

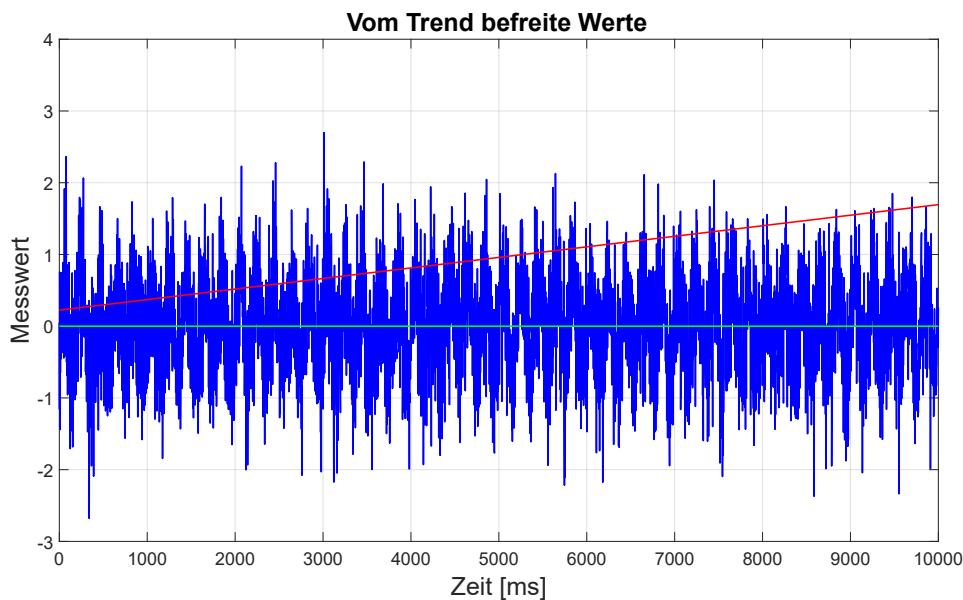


Abbildung 2.5: Simulierte Daten: Trendfunktion bestimmt und abgezogen,  $b = 0, 15$ ,  $m = 0, 2$

Wird nun eine Fast-Fourier-Transformation auf die vom Trend befreiten Daten angewendet, so enthält das Amplitudenspektrum keine falsch interpretierten, niederfrequenten Peaks mehr, welche kein untersuchtes Nutzsignal darstellen (siehe Abbildung 2.6).

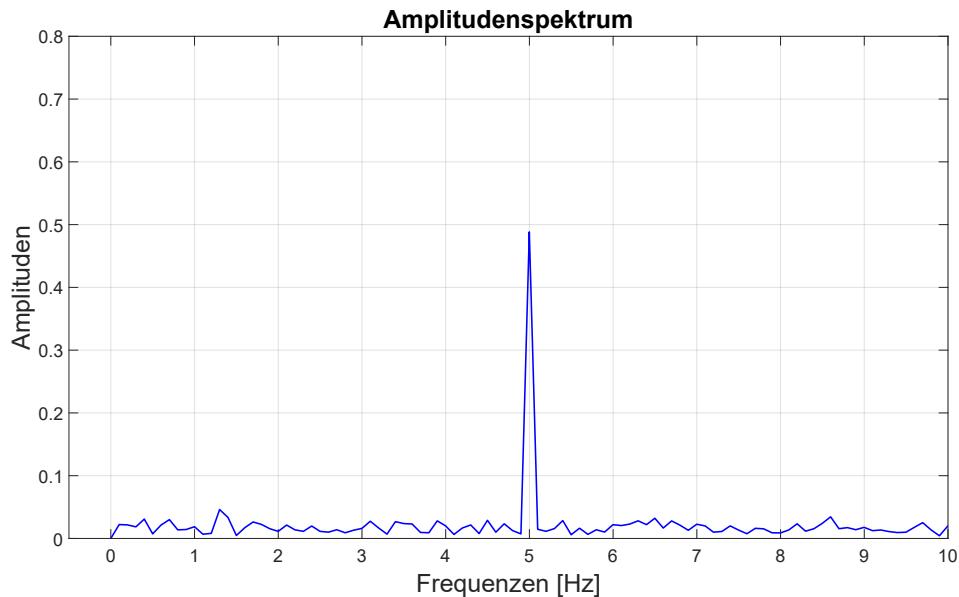


Abbildung 2.6: Simulierte Daten: Amplitudenspektrum der vom Trend befreiten Daten

Abschließend ist anzumerken, dass die Ermittlung und das Abziehen einer Trendfunktion mit Vorsicht und Verstand zu betreiben sind. Wird der Grad der Trendfunktion zu hoch angesetzt und bildet keinen signifikanten Trend ab, so kann es passieren, dass ein in den Daten vorhandenes Nutzsignal durch das Abziehen der Trendfunktion verfälscht und geglättet wird. Eine Polynomfunktion zweihundertsten Grades als Trendfunktion beispielsweise nähert sich immer weiter an das Nutzsignal beziehungsweise das Rauschen an und glättet das eigentliche Signal, das interpretiert werden soll.

## 2.4.5 Füllen von Datenlücken

Die Zeitreihenanalyse und die von ihr angewendeten Methoden erfordern eine Realisierung des stochastischen Prozesses mit konstanter Schrittweite  $\Delta t = const.$  beziehungsweise Abtastfrequenz  $\frac{1}{\Delta t}$ . In der heutigen Zeit liefern dauerhaft registrierende Instrumente und Sensoren Messdaten, die zeitlich äquidistante Zeitreihen darstellen, dennoch kann es in der Praxis vorkommen, dass der zeitliche Abstand zwischen zwei Messwerten nicht immer konstant ist. Die damit entstandene Datenlücke muss unter Umständen untersucht und behoben werden, damit die Zeitreihe korrekt ausgewertet werden kann. Datenlücken in Zeitreihen können verschiedene Ursachen haben, oftmals kann eine fehlerhafte Datenkommunikation und -übertragung verantwortlich gemacht werden. Ebenfalls denkbar sind beispielsweise kurzfristige Stromausfälle oder temporäre Zielverdeckungen.

Die nachfolgende Abbildung 2.7 zeigt die zuvor simulierten Schwingungsdaten mit einer Datenlücke über 3000 ms also 3,0 s. Bei einer Messfrequenz von 500 Hz fehlen somit 1500 Messwerte in der Zeitreihe.

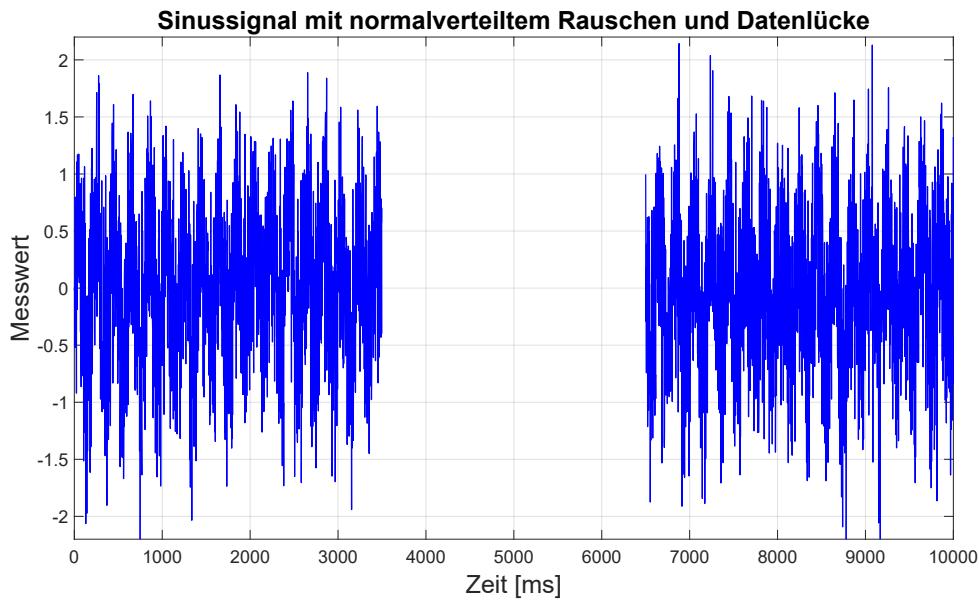


Abbildung 2.7: Simulierte Daten: Sinusschwingung mit normalverteiltem Rauschen und Datenlücke

Wird die Zeitreihe mit Datenlücke in den Frequenzbereich transformiert, so kommt es zu falschen Ergebnissen im Amplitudenspektrum. Die Form des Peaks ist nicht sauber und die Amplitude wird deutlich zu niedrig berechnet (Abbildung 2.8):

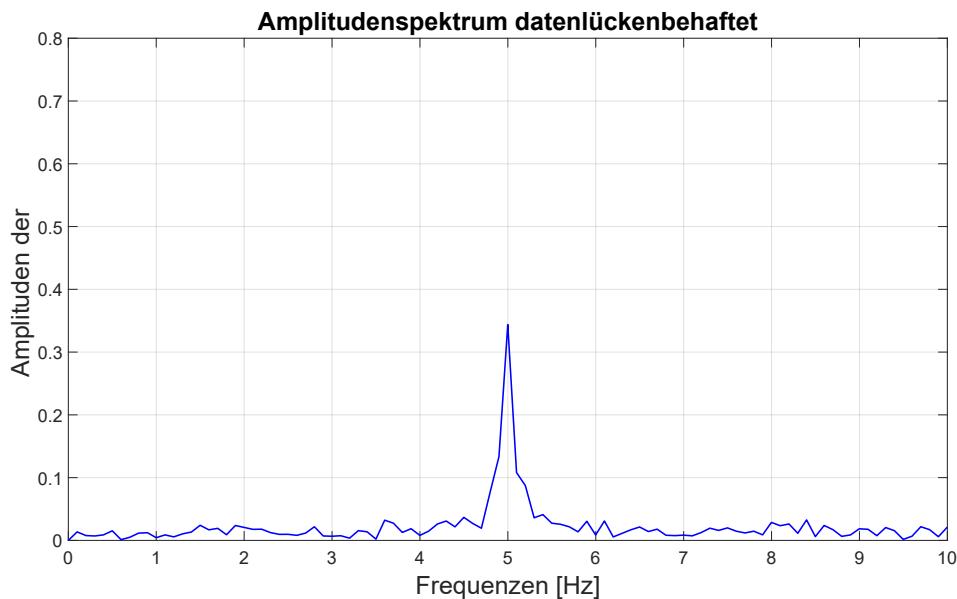


Abbildung 2.8: Simulierte Daten: Amplitudenspektrum der Zeitreihe mit Datenlücke

Sollte in einer Zeitreihe eine Datenlücke detektiert worden sein, die Handlungsbedarf erfordert, so wird die Datenlücke meist durch Interpolationsverfahren geschlossen. Eine Möglichkeit bietet die in [Neuner u. Poppe, 2009] beschriebene Kollokation, die sowohl informative, zufällige Anteile in Form des Signals als auch nicht-informative zufällige Anteile in Form des Rauschens schätzt. Die Kollokation nutzt die Ausgleichsrechnung in Form des Gauß-Helmert-Modells. Verwendbar sind zudem eine Reihe von weiteren Interpolationsverfahren, sofern diese sinnhaft auf den individuellen Fall anwendbar sind. Die einfachste Methode ist die *lineare Interpolation*, die neue Werte der Realisation bezüglich eines äquidistanten Zeitvektors berechnet, indem sie eine gerade Linie zwischen zwei benachbarten Werten zieht und den fehlenden Messwert an der Stelle des betreffenden Zeitstempels auf der Linie berechnet. Schwierig wird die Anwendung dieser Interpolation, wenn die Lücke mehr als einen fehlenden Messwert umfasst, dann sind andere Interpolationsverfahren wie die *kubische Spline-Interpolation* von Nöten. Diese bildet zur Interpolation stückweise stetig differenzierbare Kurven, die mindestens vier Datenpunkte für jeden Schritt benötigen. Diese Methode ist vorteilhaft, um in Daten enthaltene Hochfrequenzinformationen zu erhalten. Der Nachteil ist jedoch, dass steile Gradienten in den Daten, welche typischerweise in der Nähe von Minima und Maxima auftreten, störende Amplituden in der interpolierten Zeitreihe verursachen [Trauth, 2022].

Auch Ansätze nach NEWTON oder LAGRANGE sind denkbar. Bei der LAGRANGESchen Interpolation beispielsweise wird die Äquidistanz der Messzeitpunkte ausdrücklich *nicht* vorausgesetzt [Hoffmann u. Wolff, 2014].

## 2.4.6 Eliminierung von Ausreißern

Ausreißer sind Werte, die über zufällige Rauschanteile hinaus nicht in den Verlauf der Zeitreihe passen. Ihr Betrag hebt sich deutlich von dem ihrer Nachbarwerte ab, eine Quantifizierung ist hierbei individuell in Abhängigkeit von Standardabweichung und Mittelwert vorzunehmen. Eine Orientierung kann die Faustregel der dreifachen Standardabweichung hinsichtlich der Signifikanz eines Ausreißers bieten. Gründe für Ausreißer können eine fehlerhafte Datenübertragung oder ein Defekt des Sensors sein. Ausreißer können durch einen Grenzwert beziehungsweise Threshold, abhängig von der Standardabweichung der Zeitreihe, detektiert werden. Bei Detektion eines Ausreißers kann dieser analog zu einer Datenlücke mit einem, abhängig von der Nachbarschaft, interpolierten Wert behandelt werden. Ausreißer spielen bei langen Zeitreihen und großen Datenmengen eine untergeordnete Rolle. Dennoch ist kritisch und mit Sachverstand vorzugehen, kritisch ist, wenn ein Datensprung behandelt wird, bei dem es sich um eine tatsächliche Signaländerung wie eine Deformation handelt, hierbei würde wertvolles Nutzsignal herausgefiltert werden. Ausreißer haben einen negativen Einfluss auf die Ergebnisermittlung innerhalb der Zeitreihenanalyse. Er stellt dabei einen sehr steilen Signalverlauf dar, der durch die Fourier-Analyse als lange Periode interpretiert wird.

### 2.4.7 Beseitigung von Datensprüngen

Datensprünge sind abrupte Änderungen der Zeitreihe im Zeitbereich. Sie zeichnen sich durch eine unnatürlich hohe Änderung der Eingangsgröße des Sensors aus. Schon geringste Spannungsänderungen und -schwankungen, hervorgerufen durch die Stromversorgung, können Datensprünge verursachen. Auch ein Sensordefekt oder eine unfachmännische Installation der Sensorplattform können mögliche Gründe für Datensprünge sein.

Nachfolgende Abb. 2.9 verdeutlicht einen Datensprung der Zeitreihe im Zeitbereich.

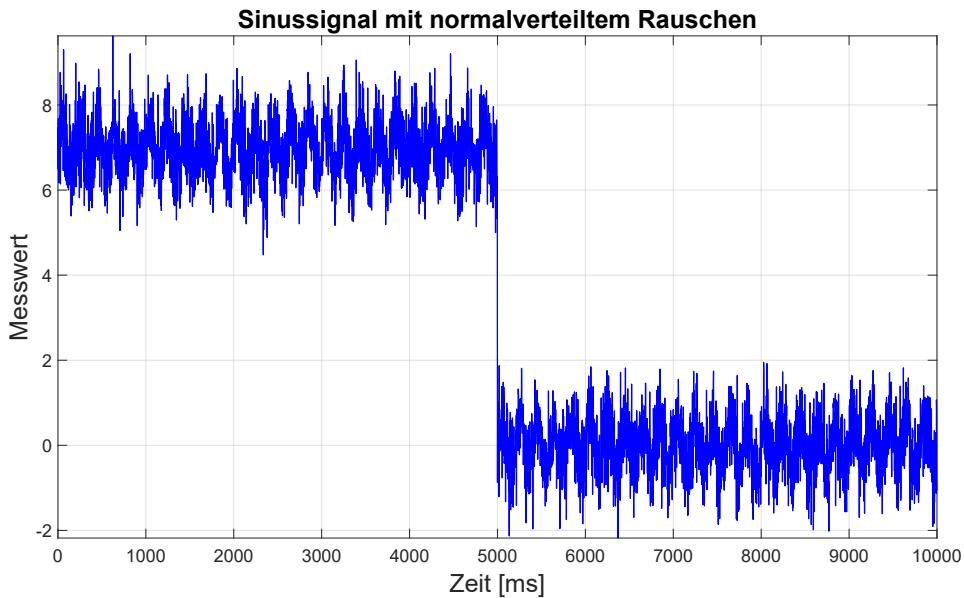


Abbildung 2.9: Simulierte Daten: Sinusschwingung mit Rauschen und Datensprung

Datensprünge sind insofern problematisch für die Auswertungen von Zeitreihen mit Werkzeugen der Fourier-Analyse, als dass der Datensprung im Rahmen der Approximation durch Sinus- und Kosinusschwingungen fehlinterpretiert wird. Bei der Transformation in den Frequenzbereich führt das zu falschen Energiegehalten, vor allem im niederfrequenten Bereich. Ersichtlich wird dies in Abbildung 2.10, welche die Fourier-Transformation bzw. das Amplitudenspektrum der von einem Datensprung behafteten Zeitreihe zeigt.

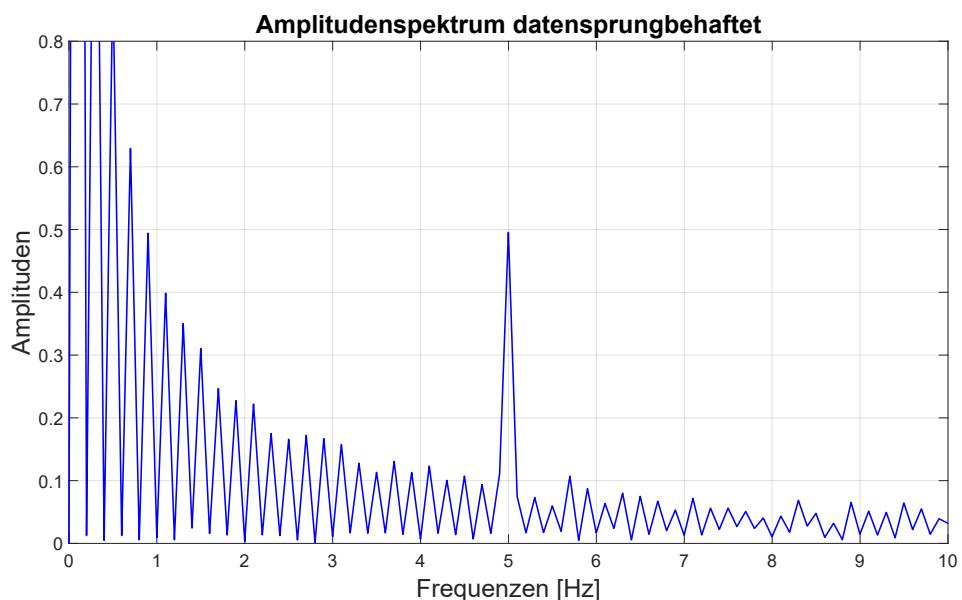


Abbildung 2.10: Simulierte Daten: Amplitudenspektrum der Zeitreihe mit Datensprung

In der einschlägigen Fachliteratur wird eine Vielzahl an Methoden behandelt, um abrupte Änderungen einer Zufallsgröße in Zeitreihen aufzuspüren. [Trauth, 2022] liefert hier einige Beispiele. Es gibt sowohl Methoden, die sich für die Erkennung von Sprüngen im Zeitbereich eignen, wie die *Rampfit-Methode*, als auch solche, die sich für den Einsatz im Frequenzbereich eignen, wie das *evolutionäre Spektrum* oder das *Wavelet-Spektrum*. Vorwiegend werden zur Detektion von Sprüngen statistische Parameter der Daten wie zum Beispiel Maße der zentralen Tendenz und der Streuung interpretiert, die in einem gleitenden Fenster, welches über den Verlauf der Zeitreihe geschoben wird, enthalten sind. Die Genauigkeit der ermittelten Parameter hängt von der Länge des gleitenden Fensters ab. Bei einer großen Fensterbreite werden Parameter wie Mittelwert und Varianz genau berechnet, jedoch verringert ein größeres Fenster die Genauigkeit der berechneten Änderungen der Parameter, also des Datensprungs. Dieses Phänomen wird als *Grenander's Unsicherheitsprinzip der Statistik* bezeichnet. Die Prüfung der Unterschiede der zentralen Tendenz und der Streuung zwischen zwei verschiedenen Schiebefenstern über einen Signifikanztest überwindet dieses Problem teilweise. Hierbei würden klassische t- oder F-Tests verwendet, um scharfe Übergänge in den statistischen Parametern auf Signifikanz zu prüfen. Die beiden Tests gehen von der Grundannahme aus, dass die Stichproben aus einer Grundgesamtheit auf Basis der GAUSS'schen Normalverteilung stammen. Die nicht-parametrischen MANN-WHITNEY- und ANSARI-BRADLEY-Tests bieten eine von der Verteilung unabhängige Lösung. Hier werden dem interessierten Leser die betreffenden Kapitel in [Trauth, 2022] empfohlen. Allerdings helfen auch häufig simplere Lösungen wie das graphische Aufdecken in einfachen Plots und das anschließende, stückweise Auswerten.

## 2.4.8 Leck-Effekt und Fensterfunktionen

Um den Nutzen von Fensterfunktionen in der Zeitreihen- und Spektralanalyse zu verdeutlichen, muss zunächst der sogenannte "*Leck-Effekt*" oder engl. "*Leakage-Effect*" erklärt werden. Dieser stellt eine spezielle Problematik der Spektralanalyse dar, die auftritt, wenn das zu analysierende Signal zeitlich nicht begrenzt ist, aber eine Spektralschätzung auf der Basis lediglich eines begrenzten und endlichen Ausschnitts des Signals erfolgt. Dies gilt für alle diskreten Integraltransformationen, die auf Grundlage einer diskreten Menge an Abtastwerten ein eigentlich zeitkontinuierliches Signal analysieren. Als Folge treten Spektralkomponenten im Frequenzbereich auf, die von der Anwendung herkommend nicht erwartet werden. Dieser Fall betrifft fast alle Anwendungsfälle zur Analyse geodätischer Zeitreihen innerhalb der Ingenieurgeodäsie und weiterer Fachdisziplinen der Geodäsie wie der Landesvermessung oder der Fernerkundung.

Der Grund für den Leck-Effekt wird in [Mertins, 2023] anschaulich behandelt und kann anhand einer *N*-Punkte-DFT eines abgetasteten komplexen Exponentialsignals der Frequenz  $\omega_0$  gezeigt werden, welche sich zu:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\omega_0 n} e^{\frac{-j2\pi nk}{N}} \quad (2.6)$$

ergibt.

Wenn  $\omega_0$  hierbei ein ganzzahliges Vielfaches von  $2\pi/N$  ist und also  $\omega_0 = 2\pi k_0/N$  mit  $k_0 \in \mathbb{Z}$  gilt, so wird nur der DFT-Koeffizient  $X(k_0)$  ungleich null sein. Die DFT liefert somit das exakte Spektrum  $X(k) = N\delta_{k,k_0}$ .

Wenn dagegen gilt  $\omega_0 = k_0 \cdot 2\pi/N + \alpha$  mit  $|\alpha| \leq 1/2$  und  $\alpha \neq 0$ , dann werden alle Fourierkoeffizienten  $X(k)$  von null verschieden sein. Dies beschreibt den Leck-Effekt, dessen Name von der Vorstellung kommt, dass die vorhandene Spektralkomponente mit der Frequenz  $\omega_0$  in alle ausgewerteten Fourierkoeffizienten  $X(k)$  „hineinleckt“ beziehungsweise ausfließt und dadurch deren Wert verfälscht [Mertins, 2023].

Der Leck-Effekt, das Ausfließen der Spektralkomponenten, führt allgemein zu betrags- und phasengewichteten Überlagerungen der Spektralkomponenten und bewirkt eine Erschwerung der Analyse einer Zeitreihe mit Integraltransformationen, oder macht eine korrekte Interpretation der Ergebnisse sogar unmöglich. Um den Einfluss dieses Leck-Effekts zu mindern, kann der zu analysierende Signalausschnitt vor der Analyse durch eine Integraltransformation mit einer geeigneten Fensterfunktion multipliziert werden. Die gängigsten Fensterfunktionen und deren Auswirkungen sollen an dieser Stelle kurz erläutert werden.

Man spricht von der Fensterung eines Signals und beschreibt diese durch die Multiplikation der Folge (Zeitreihe) mit der Fensterfolge:

$$x_w[n] = x[n] \cdot w[n] \quad (2.7)$$

Die dabei einfachste und anschaulichste Fensterfolge ist das Rechteckfenster, welches im Bereich der Breite des Fensters den Wert 1, ansonsten den Wert 0 hat:

$$w[n] = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.8)$$

Der Einfluss eines Fensters, wie beispielsweise eines Rechteckfensters, im Zeitbereich ist einfach zu beschreiben; die Impulsantwort der Zeitreihe wird auf die Länge des Fensters begrenzt und mit der Form des Fensters geformt. Das Betragsspektrum der Rechteckfunktion hat die Form der *si*-Funktion. Das Rechteckfenster und sein Spektrum ergeben sich zu:

$$W(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} w[n] \cdot e^{-j\Omega n} = e^{-j\Omega N/2} \cdot \frac{\sin(N\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)} \quad (2.9)$$

Aus Gründen der vereinfachten Darstellung wird für die Zeitreihe als weiterführendes Beispiel das zeitkontinuierliche Kosinussignal gewählt:

$$x(t) = \cos(\omega_0 t) \quad (2.10)$$

Nach der Abtastung des zeitkontinuierlichen Signals kann, wegen des engen Zusammenhangs zwischen dem Spektrum eines zeitkontinuierlichen Signals und seiner Abtastfolge, das Ergebnis unmittelbar ins zeitdiskrete übertragen werden. Damit ergibt sich mit der normierten Kreisfrequenz

$$\Omega_0 = \omega_0 \cdot T_s \quad (2.11)$$

für das zeitdiskrete Signal

$$x[n] = \cos(\Omega_0 n) \quad (2.12)$$

und daraus sein Spektrum zu:

$$X(e^{j\Omega}) = \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [\delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi k) + \delta(\Omega + \Omega_0 - 2\pi k)] \quad (2.13)$$

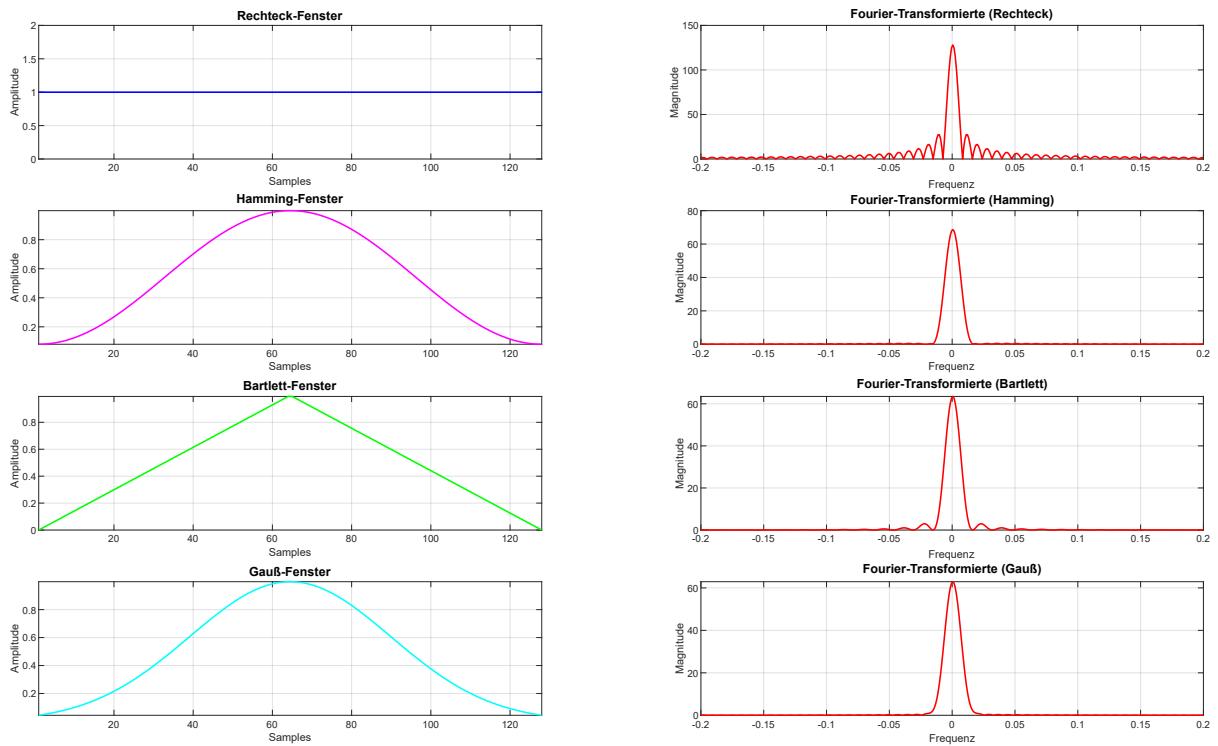
Die Multiplikation der beiden Folgen (2.7) bewirkt im Frequenzbereich eine Faltung der Spektren.

$$X_w(e^{j\Omega}) = \frac{1}{2\pi} X(e^{j\Omega}) \cdot W(e^{j\Omega}) \quad (2.14)$$

Es sei erwähnt, dass das Rechteckfenster in diesem Kapitel aufgrund seiner Einfachheit lediglich zur Veranschaulichung der Wirkung einer Fensterfunktion, sowohl im Zeit- als auch im Frequenzbereich verwendet wurde. Sollte ein Rechteckfenster zur Minimierung des Leckeffekts eingesetzt werden, so funktioniert dies nur in *einem* speziellen Fall, nämlich wenn die Fensterbreite des Rechteckfensters exakt ein ganzzahliges Vielfaches der Schwingungsdauer der Signalschwingung beträgt. Dann tritt infolge der Fensterung durch ein Rechteckfenster im Frequenzbereich kein Leck-Effekt auf.

Die Wahl des Fensters in der Fourier-Analyse hat signifikante Auswirkungen auf die Ergebnisse im Frequenzbereich. Die Bewertungskriterien für die Wahl einer Fensterfunktion beziehen sich stets auf die Übertragungsfunktion, sind also ablesbar anhand der Fourier-Transformation im Frequenzbereich. Die gängigsten Fenster sind das Rechteckfenster, das BARTLETT-Fenster, das HAMMING-Fenster oder das GAUSS-Fenster, welches eine besondere Stellung in dieser Arbeit einnimmt. Das GAUSS-Fenster wird in den folgenden Kapiteln näher behandelt.

Die erwähnten vier Beispiele der Fensterfunktionen sowie deren Fourier-Transformierte sind der nachfolgenden [Abbildung 2.11](#) zu entnehmen.



*Abbildung 2.11:* Auswahl von Fensterfunktionen und deren Fourier-Transformierte

Aus der Anschauung einiger üblicher Fensterfunktionen, sowie deren Spektren im Frequenzbereich, ermittelt durch Fourier-Transformation, ergeben sich einige Bewertungskriterien zur Nutzung in der Zeitreihenanalyse [Kammeyer u. Kroschel, 2022]:

- **Breite des Hauptmaximums:**

Die Verbreiterung des Hauptmaximums beziehungsweise -peaks führt zu einem schnelleren Abfall der Nebenmaxima, erhöht somit die Dynamik der Fensterfunktion und verringert die Auswirkungen des Leck-Effekts. Jedoch führt dies zur Verringerung der Frequenzauflösung beziehungsweise -selektivität. Fensterfunktionen mit breitem Hauptmaximum werden deshalb als *nicht-selektive, dynamische Fenster* bezeichnet. Jene Fenster mit umgekehrten Eigenschaften, also einem schmalen Hauptmaximum als *selektive, nicht-dynamische Fenster*.

- **Relative Amplitude des Nebenmaximums:**

Stark auftretende Nebenmaxima der Fourier-Transformierten einer Fensterfunktion erhöhen den Leck-Effekt. Als Kriterium wird das Verhältnis zwischen Amplitude des Hauptmaximums und der Amplitude des höchsten Nebenmaximums verwendet.

- **Faktor des Leck-Effekts:**

Der Leck-Effekt wird durch tiefe Nebenmaxima verringert. Der Faktor des Leck-

Effekts ist definiert als das Verhältnis der Leistung unter allen Nebenmaxima zur Leistung der gesamten Funktion.

- **Maximaler Abtastfehler:**

Der maximale Abtastfehler wird als das Verhältnis der Amplitude des Hauptmaximums zur Amplitude bei der Frequenz von  $\frac{\pi}{\text{BreiteFenster}}$  definiert.

Die genannten Bewertungskriterien können dazu genutzt werden, eine Fensterfunktion mit passenden Eigenschaften in Abhängigkeit von der Anwendung zu finden.

## 2.4.9 Abtastung von zeitkontinuierlichen Signalen und Nyquist-Shannon-Abtasttheorem

Unter der Abtastung eines zeitkontinuierlichen Signals  $x(t)$  (das können zu beobachtende, physikalische Ereignisse oder Deformationen sein) versteht man nach [Mertins, 2023] die Entnahme von Signalwerten  $x(t_n)$  zu diskreten Zeitpunkten  $t_n$ . In der Geodäsie ist hierbei eine gleichförmige Abtastung mit  $t_n = nT$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  üblich, eine Abtastung zu beliebigen Zeitpunkten wird selten praktiziert und widersprüche der Forderung nach zeitlicher Äquidistanz der Abtastwerte in den meisten Methoden der Zeitreihenanalyse. Das Zeitintervall  $T$  wird als *Abtastintervall* bezeichnet, der Kehrwert  $f_a = \frac{1}{T}$  als *Abtastfrequenz*. Die Augenblickswerte  $x(nT)$  sind die *Abtastwerte*, also in der Praxis die Messwerte, die durch den Sensor erfasst werden. Eine weitere Möglichkeit der realen Abtastung besteht darin, anstelle der Augenblickswerte  $x(nT)$  die über Intervalle zwischen zwei Zeitpunkten der Breite  $T_0$  gemittelten Werte über Integration zu erzeugen und auszugeben, wie in Formel (2.15) verdeutlicht ist.

$$\bar{x}(nT) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(nT - t) dt \quad (2.15)$$

Die wichtigste Grundlage für die Zeitreihenanalyse beziehungsweise die Abtastung eines Signals, welches entweder rekonstruiert oder interpretiert werden soll, stellt das NYQUIST-SHANNON-Abtasttheorem dar.

Dieses beschreibt die Bedingung, unter der die fehlerfreie Rekonstruktion eines Signals  $x(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  aus den Abtastwerten  $x(nT)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  möglich ist. Die Herleitung des Abtasttheorems ist über verschiedene Wege wie zum Beispiel über eine inverse Fourier-Transformation oder unter Verwendung der Dirac-Impulsfolge möglich. Die Herleitungen sollen an dieser Stelle nicht weiter thematisiert werden, hier wird auf [Mertins, 2023, S. 115 ff.] verwiesen.

Der entscheidende Grundstein für das Abtasttheorem wurde durch [Whittaker, 1935] in Form des Beweises geliefert. HARRY NYQUIST forschte ebenfalls an diesem Thema und beschäftigte sich in diesem Zusammenhang mit der Übertragung von Daten über bandbegrenzte Kanäle und zeigte dabei, dass eine interferenzfreie Übertragung über einen auf  $f_g$  bandbegrenzten Kanal bis zur maximalen Symbolrate von  $r_{max} = 2f_g$  möglich ist [Nyquist, 1928]. Später wurde das Abtasttheorem durch [Shannon, 1949] in die Kommunikationstheorie eingeführt. Die maßgeblichen Wegbereiter für die Entwicklung des Abtasttheorems wurden somit namensgebend für das NYQUIST-SHANNON-Abtasttheorem.

Die nun auf für die Anwendung in der praktischen Zeitreihenanalyse entscheidende Formulierung des Theorems lautet:

*Ein Signal  $x(t)$  kann dann aus seinen Abtastwerten  $x(nT)$  eindeutig rekonstruiert werden, wenn  $x(t)$  auf die halbe Abtastfrequenz bandbegrenzt ist. Für die Abtastfrequenz in Hertz bedeutet dies  $f_a = \frac{1}{T} \geq 2f_g$ .*

Im Fall  $f_a > 2f_g$  wird von einer *Überabtastung* gesprochen, die minimal zulässige Abtastfrequenz von  $f_{a,min} = 2f_g$  wird als *NYQUIST-Frequenz* bezeichnet. In diesem speziellen Fall von  $f_a = 2f_g$  wird auch von der *kritischen Abtastung* gesprochen. Kann die nach dem Abtasttheorem gegebene minimale Abtastrate nicht eingehalten werden, so bezeichnet man dies als *Unterabtastung*. Dies führt zur Überlappung der spektralen Wiederholungen und  $x(t)$  kann nicht mehr in eindeutiger Weise aus  $x(nT)$  rekonstruiert werden, da mehrere Eingangsfrequenzen auf die gleiche Folge  $x(nT)$  und somit auf die gleiche Ausgangsfrequenz abgebildet werden. Dieser auftretende Effekt der sich überlappenden spektralen Wiederholungen wird als *Überfaltung* oder *Aliasing* bezeichnet. Der englische Begriff ergibt sich aus dem Umstand, dass jeweils mehrere Frequenzen des rekonstruierten Signals existieren, die als Aliasse voneinander auftreten und die lediglich aus der Kenntnis der Abtastrate nicht voneinander zu unterscheiden sind [Mertins, 2023].

Verdeutlicht werden kann dieser Umstand und der Effekt des *Aliasing* durch folgende Grafik, die die Unterabtastung eines Sinussignals darstellt, in dem die Abtastwerte und das daraus rekonstruierte Signal zwei verschiedene Aliasse liefern:

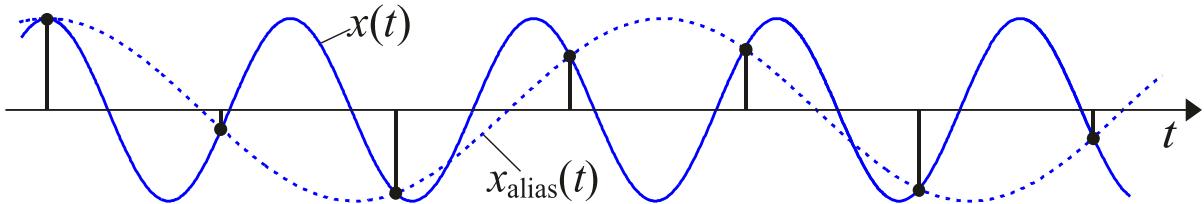


Abbildung 2.12: Unterabtastung eines sinusförmigen Signals: die Abtastung von  $x(t) = \cos(\omega_0 t)$  mit  $\omega_0 > \frac{\omega_a}{2}$  liefert die gleichen Abtastwerte wie die Abtastung von  $x_{alias}(t) = \cos(\omega'_0 t)$  mit  $\omega'_0 = \omega_a - \omega_0$

Im Rahmen der Signaltheorie und Verarbeitung wird zur Behebung des Alias-Effekts entweder das Nutzsignal bandbegrenzt oder ein sogenannter Anti-Alias-Filter verwendet. Ersteres Lösung ist in Bezug auf Signale in der Geodäsie nicht möglich, da diese in ihren Eigenschaften nicht modifizierbar sind, da es sich um zu beobachtende physikalische Phänomene oder Deformationen handelt. Hier ist eine bewährte Lösung, sensorseitig auf eine höhere Abtastfrequenz zurückzugreifen, oder die Wahl des Sensors entsprechend anzupassen, sodass das Abtasttheorem nicht verletzt wird.



# 3 Grundlagen der Spektralanalyse

„Die Transformation der Welt kommt, wenn wir uns selbst verändern.“

---

(J. Krishnamurti, Indischer Philosoph, 1896 - 1986.)

Als Integraltransformation wird eine Transformation bezeichnet, die eine Funktion aus ihrem ursprünglichen Funktionsraum durch Integration in einen anderen Funktionsraum abbildet. In der Zeitreihenanalyse werden Integraltransformationen häufig genutzt, um Funktionen, in diesem Fall Zeitreihen beziehungsweise Realisationen stochastischer Prozesse aus ihrem originären Zeitbereich in den Frequenzbereich zu transformieren. Dieser Vorgang erlaubt das Ermitteln von Energiegehalten (Amplituden) und Frequenzen im Frequenzbereich, die aus der Darstellung im Zeitbereich nicht abzulesen wären.

In den folgenden Unterkapiteln wird der Weg zu der in dieser Arbeit fokussierten Gabor-Transformation durch die Betrachtung der Fourier-Reihe, anschließend der Fourier-Transformation, der Diskreten- und der Fast-Fourier-Transformation und über die tiefere Behandlung der Kurzzeit-Fourier-Transformation bereitet. Die Gabor-Transformation wird schließlich in [Kapitel 4](#) zur Auswertung geodätischer Zeitreihen verwendet und validiert.

## 3.1 Fourier-Reihe

Die in dieser Arbeit behandelte Fourier-Reihe sowie die darauf aufbauende Fourier-Transformation sind benannt nach dem französischen Mathematiker JEAN BAPTISTE JOSEPH FOURIER (\*21. März 1768 in Auxerre; †16. Mai 1830 in Paris). FOURIER, Sohn eines Schneiders, war ein bedeutender Begründer der angewandten Mathematik des frühen 19. Jahrhunderts. Infolge der politischen Umbrüche während der Französischen Revolution war er in wechselnden Funktionen tätig, unter anderem als Präsident des Revolutionskomitees sowie als Gefangener des revolutionären Regimes [Demaret et al., 2024].

Im Zuge der Ägyptenexpedition NAPOLÉONS nahm FOURIER als wissenschaftlicher Begleiter teil. Nach dem Rückzug der französischen Truppen wurde er kurzzeitig von britischen Streitkräften gefangen genommen, konnte jedoch mit umfangreichen wissenschaftlichen Aufzeichnungen nach Frankreich zurückkehren. FOURIER übernahm später das Amt des Präfekten des *Départements Isère* und war maßgeblich an der Trockenlegung der Sümpfe in der Region Lyon beteiligt, wodurch ein bedeutender Beitrag zur Eindämmung der Malaria geleistet wurde [Demaret et al., 2024].

Im Jahr 1822 wurde FOURIER als ständiges Mitglied in die *Académie des Sciences* aufgenommen. Im selben Jahr erschien sein Hauptwerk *Théorie analytique de la chaleur*, in dem er eine mathematische Theorie des Wärmeffusses entwickelte. Darin stellte er die Temperaturverteilung in einem eindimensionalen homogenen Medium mittels einer Zerlegung in trigonometrische Reihen dar und formulierte die Fourier-Reihe als analytisches Werkzeug

zur Lösung der Wärmeleitungsgleichung. Er erweiterte diese Überlegungen durch die Einführung des Fourier-Integrals, woraus sich später die Fourier-Transformation als zentrales Verfahren zur Analyse kontinuierlicher Signale entwickelte [Demaret et al., 2024].

FOURIER postulierte zudem die weitreichende Annahme, dass beliebige (auch unstetige) Funktionen durch trigonometrische Reihen darstellbar seien. Diese Aussage stieß zur damaligen Zeit auf erheblichen Widerspruch in der mathematischen Fachwelt, insbesondere bei AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY (1789 – 1857) und NIELS HENRIK ABEL (1802 – 1829), die Zweifel an der allgemeinen Konvergenz solcher Reihen äußerten. Erst JOHANN PETER GUSTAV LEJEUNE DIRICHLET (1805 – 1859) konnte im Jahr 1829 in seiner Arbeit *Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données* mathematisch belegen, dass FOURIERS Behauptung für eine breite Klasse von Funktionen – insbesondere für stückweise stetige, beschränkte und differenzierbare Funktionen – gilt. Diese Resultate legten das Fundament für die moderne Theorie der orthogonalen Funktionenreihen und deren Anwendungen in der Signalverarbeitung, Physik und numerischen Mathematik [Demaret et al., 2024].

Folgende Abbildung zeigt ein Ölgemälde, auf dem JEAN BAPTISTE JOSEPH FOURIER in seiner typischen Kleidung als Präfekt zu sehen ist. Gemalt wurde das Werk um circa 1806 von PIERRE-CLAUDE GAUTHEROT.



*Abbildung 3.1:* Ölgemälde von JEAN BAPTISTE JOSEPH FOURIER in seiner Kleidung als Präfekt, gemalt von PIERRE-CLAUDE GAUTHEROT um 1806 [Gautherot, 1806]

In Vorbereitung für die Erklärung der Integraltransformationen wird zunächst die Fourier-Reihe betrachtet. Nach vorheriger, historischer Einordnung der Errungenschaften von JEAN BAPTISTE JOSEPH FOURIER im Bereich der Mathematik folgt die von ihm postulierte Grundlage für die Fourier-Reihe:

*Jede periodische Funktion mit einer Periodendauer  $T$  lässt sich als eine Summe von Sinus- und Kosinusfunktionen mit ganzzahligen Vielfachen einer Grundfrequenz  $F = \frac{1}{T}$  ausdrücken um die Funktion näherungsweise darzustellen beziehungsweise zu approximieren.*

Im Folgenden wird die detaillierte Herleitung der Fourier-Reihe nach dem Beispiel aus [Nitschke, 2017] vorgenommen. Gegeben sei eine Funktion  $f(t)$ , ein Intervall  $[a; b]$  und der Entwicklungsgrad  $n$ . Gesucht ist das trigonometrische Polynom

$$\begin{aligned} s_n(t) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + a_3 \cos 3\omega t + \dots + a_n \cos n\omega t \\ &\quad + b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + b_3 \sin 3\omega t + \dots + b_n \sin n\omega t \end{aligned} \quad (3.1)$$

als Summendarstellung:

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t), \text{ wobei } \omega = \frac{2\pi}{b-a} \quad (3.2)$$

der Periode  $b - a$ , das  $f$  auf dem Intervall  $[a; b]$  optimal approximiert.

Da für  $n \rightarrow \infty$  das trigonometrische Polynom  $s_n(t)$  gegen die Funktion  $f(t)$  konvergieren soll, folgt der Ansatz:

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t). \quad (3.3)$$

Mit den Gesetzmäßigkeiten im Zusammenhang mit komplexen Zahlen  $\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$  und  $\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = i \frac{e^{-ix} - e^{ix}}{2}$  lässt sich (3.2) durch komplexe Exponentialfunktionen ausdrücken:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \frac{e^{ik\omega t} + e^{-ik\omega t}}{2} + ib_k \frac{e^{-ik\omega t} - e^{ik\omega t}}{2} \right) \quad (3.4)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{a_k - ib_k}{2} e^{ik\omega t} + \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-ik\omega t} \right). \quad (3.5)$$

Zur Vereinfachung werden nun Ausdrücke wie folgt ersetzt:

$$c_0 = \frac{a_0}{2} \quad (3.6) \quad c_k = \frac{a_k - ib_k}{2} \quad (3.7) \quad c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2} \quad (3.8)$$

Damit erhält man für (3.5) die vereinfachte und übersichtliche Form

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}. \quad (3.9)$$

Werden nun beide Seiten der Gleichung mit  $e^{-i\ell\omega t}$  multipliziert folgt

$$f(t)e^{-i\ell\omega t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i(k-\ell)\omega t}. \quad (3.10)$$

Anschließende Integration liefert

$$\int_a^b f(t)e^{-i\ell\omega t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_a^b e^{i(k-\ell)\omega t} dt \quad (3.11)$$

und es gilt für

$$\int_a^b e^{i(k-\ell)\omega t} dt = \begin{cases} \int_a^b 1 dt = [t]_a^b = b - a & \text{falls } k = \ell \\ 0 & \text{falls } k \neq \ell \end{cases} \quad (3.12)$$

$$= c_\ell(b - a) \quad (3.13)$$

Der vorangegangene Ausdruck zeigt, dass für den Fall  $k \neq \ell$  die Funktionen  $e^{ik\omega t}$  und  $e^{i\ell\omega t}$  orthogonal zueinander sind. Diese wichtige Eigenschaft ist die Grundlage dafür, dass eine Funktion in eine Fourier-Reihe zerlegt werden kann. Jeder periodische Funktionsverlauf  $f(t)$  kann als Summe von Basisfunktionen  $e^{ik\omega t}$  dargestellt werden.

Es folgt durch Umstellung die Ermittlung des Fourierreihenkoeffizienten  $c_\ell$

$$c_\ell = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) e^{-i\ell\omega t} dt. \quad (3.14)$$

Damit folgt für die reellen Fourier-Koeffizienten  $a_k$  und  $b_k$ :

$$a_k = c_k + c_{-k} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) (e^{-ik\omega t} + e^{ik\omega t}) dt \quad (3.15)$$

$$= \frac{2}{b-a} \int_a^b f(t) \cos(k\omega t) dt \quad (3.16)$$

$$b_k = \frac{c_{-k} - c_k}{i} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) \frac{e^{ik\omega t} - e^{-ik\omega t}}{i} dt \quad (3.17)$$

$$= \frac{2}{b-a} \int_a^b f(t) \sin(k\omega t) dt \quad (3.18)$$

Die Fourier-Koeffizienten können wahlweise reell oder komplex berechnet werden.

**Reelle Berechnung:**

$$\omega = \frac{2\pi}{b-a} \quad (3.19)$$

**Komplexe Berechnung:**

$$\omega = \frac{2\pi}{b-a} \quad (3.20)$$

$$a_k = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(t) \cos(k\omega t) dt \quad (3.21)$$

$$c_k = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) e^{-ik\omega t} dt \quad (3.22)$$

$$k = 0, \dots, n$$

$$k = -n, \dots, n$$

$$b_k = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(t) \sin(k\omega t) dt \quad (3.23)$$

$$s_n(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik\omega t} \quad (3.24)$$

$$k = 1, \dots, n$$

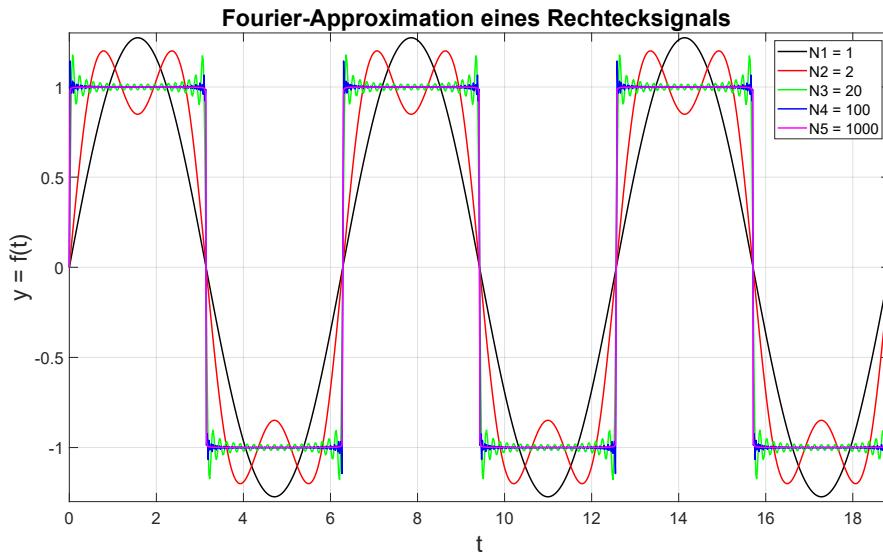
$$s_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)) \quad (3.25)$$

Die Approximation einer Funktion durch eine Summierung von Sinus- und Cosinus-Funktionen, also durch Anwendung der Fourier-Reihe, soll an dieser Stelle durch einen Plot verdeutlicht werden. Zugrunde liegt ein Rechtecksignal mit der Impulshöhe  $h$  mit:

$$f(t) = \begin{cases} h & \text{für } 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ -h & \text{für } \frac{T}{2} \leq t < T \end{cases} \quad \text{und } f(t+nT) = f(t), \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (3.26)$$

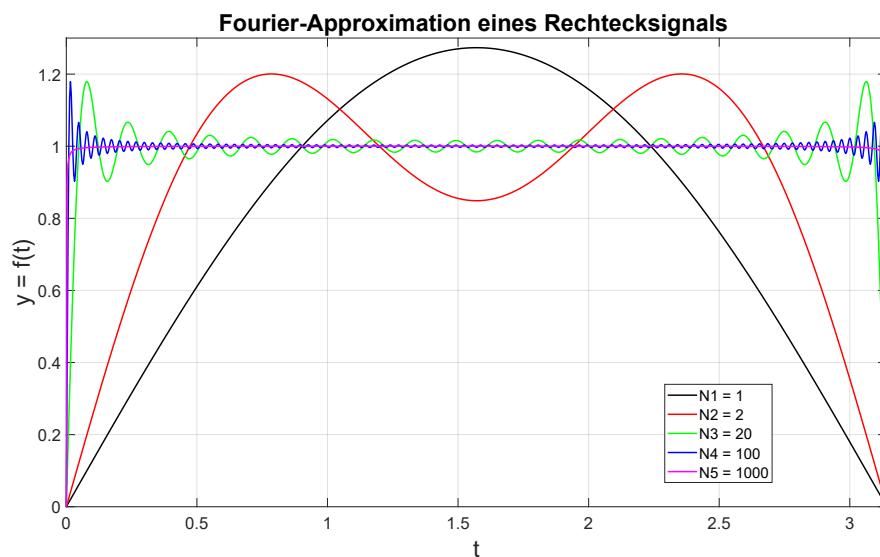
Es folgt die numerische Berechnung der Fourerkoeffizienten durch Summenbildung in MATLAB. Der Grafik ist zu entnehmen, dass die Summenbildung mit verschiedener Anzahl von Summengliedern vorgenommen wurde (1, 2, 20, 100 und 1000 Summenglieder).

Dies verdeutlicht anschaulich, wie die Fourier-Reihe sich immer weiter der Rechteckfunktion annähert, je höher die Zahl der Summenglieder der Sinus- und Kosinus-Funktionen gewählt wird ([Abbildung 3.2](#)).



*Abbildung 3.2:* Simulierte Daten: Approximation an eines Rechtecksignals durch die Fourier-Reihe über Summenbildung. Darstellung von drei Perioden.

Um einen detaillierteren Blick auf die Approximation zu gewähren, folgt die [Abbildung 3.3](#), welche die gleichen Daten, jedoch mit der Darstellung nur einer halben Periode zeigt.



*Abbildung 3.3:* Simulierte Daten: Approximation an eines Rechtecksignals durch die Fourier-Reihe über Summenbildung. Darstellung von einer halben Periode.

Bei Betrachtung von (3.25) wird deutlich, dass bei der Approximation einer Funktion durch die Fourier-Reihe  $2n + 1$  Unbekannte zu berechnen sind. Zusammengefasst werden Sinus- und Kosinusschwingungen mit ihren spezifischen Frequenzen  $kF$ , als orthonormale Basisfunktionen zur Darstellung der Funktion  $f(t)$  mit Hilfe der Reihenbildung durch die Fourier-Reihe verwendet.

Die Fourier-Koeffizienten  $a_k$  und  $b_k$  gewichten dabei die Sinus- und Kosinusschwingungen und verschieben diese gegeneinander in geeigneter Weise zur Rekonstruktion der Ausgangsfunktion. Anders formuliert beschreiben die Fourier-Koeffizienten den Grad, wie stark der jeweilige Frequenzanteil in der betrachteten Ausgangsfunktion auftritt. Aus diesem Grund sind sie die grundlegenden Bestimmungsgrößen, wenn eine Funktion durch eine Fourier-Reihe rekonstruiert werden soll [Thuselt u. Gennrich, 2013].

## 3.2 Fourier-Transformation (FT)

Im vorangegangenen Kapitel wurde die Zerlegung beziehungsweise Approximation von *periodischen* Funktionen über die Fourier-Reihe betrachtet. Da in der Praxis und im Zusammenhang mit der Auswertung von Zeitreihen hauptsächlich nichtperiodische Signale auftreten, ist der Umstand von besonderem Interesse, dass sich diese in ähnlicher Weise zerlegen lassen. Dies ist möglich, wenn die Funktionen gegen unendlich so schnell abfallen, dass die Fläche unter ihrem Graphen endlich bleibt. Ausgang ist die komplexe Fourier-Reihe (3.9) mit einer Periodendauer, welche gegen unendlich geht. Die Abstände zwischen den einzelnen Frequenzanteilen  $kF$  werden immer kleiner, da  $F = \frac{1}{T}$  für  $T \rightarrow \infty$  gegen null geht. Die Fourier-Reihe geht in ein Integral über, das sogenannte *Fourier-Integral*. Statt der zuvor ermittelten, diskreten Fourier-Koeffizienten muss jetzt eine kontinuierliche Funktion  $f(F)$  aller möglichen Frequenzen bestimmt werden. Diese gesuchte Funktion heißt **FOURIER-Transformierte** und wird durch **FOURIER-Transformation** der Funktion  $f(t)$  ermittelt. Sie enthält das sogenannte *Frequenzspektrum*, welches die Zusammensetzung eines Signals aus seinen Bestandteilen angibt. Die Fourier-Transformation bewirkt hierbei die klassische und schon oft angesprochene Überführung eines Signals aus dem Zeitbereich in den Frequenzbereich. Der Vollständigkeit halber ist anzumerken, dass auch die Verarbeitung von nicht-zeitabhängigen, sondern räumlich abhängigen Daten möglich ist. In diesem Fall wird allgemein von einer Überführung aus dem Original- in den Bildbereich gesprochen [Thuselt u. Gennrich, 2013].

Es folgt die kontinuierliche FOURIER-Transformation von  $f(t)$  zu  $\hat{f}(F)$ :

$$\hat{f}(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i F t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (3.27)$$

und die Rücktransformation (auch Synthese) von  $\hat{f}(F)$  zu  $f(t)$ :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(F) e^{2\pi i F t} dF = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(F) e^{i\omega t} dF. \quad (3.28)$$

Das Ergebnis der Fourier-Transformation (3.27) wird als *Spektrum* des Signals  $f(t)$  bezeichnet. Da das Ergebnis im Allgemeinen komplexwertig ist, ist eine Betrachtung nach Betrag und Phase üblich, das Spektrum setzt sich somit aus *Betragsspektrum* und *Phasenspektrum* zusammen [Mertins, 2023]:

$$\hat{f}(F) = |\hat{f}(F)| \cdot e^{i\varphi_f(\omega)} \quad (3.29)$$

Die Größe  $|\hat{f}(F)|$  wird als *Betragsspektrum* oder *Amplitudenspektrum* bezeichnet und enthält die Amplituden, also die Energieinformationen der Frequenzkomponenten, welche im Eingangssignal enthalten sind. Da es sich bei der Fourier-Transformation um eine orthogonale Transformation handelt, führt die beliebige Hin- und Rücktransformation zu keinem Informationsverlust. Die Zeitinformation des Eingangssignals ist nach der Fourier-Transformation im Phasenspektrum  $\varphi_f(\omega)$  enthalten.

### 3.3 Diskrete-Fourier-Transformation (DFT)

Durch Anwendung der Formeln der Fourier-Transformation kann aus einem kontinuierlichen Zeitsignal das korrespondierende, kontinuierliche Frequenzspektrum bestimmt werden. In der geodätischen Zeitreihenanalyse stehen die Werte des erfassten Signals jedoch nur zu diskreten Zeitpunkten und in diskreter, endlicher Anzahl zur Verfügung, bedingt durch eine sensorbasierte Abtastung mit einer diskreten Abtastfrequenz. Eine solche zeitdiskrete Zeitreihe kann als Annäherung an ein zeitkontinuierliches Signal betrachtet werden. Um dieses auszuwerten, wird das Spektrum numerisch unter Anwendung der sogenannten Diskreten-FOURIER-Transformation (DFT) bestimmt.

Mit der Zeitreihe im diskreten Zeitbereich als Eingangsgröße muss für die Berechnung auch der Frequenzbereich diskretisiert werden, was zur Folge hat, dass die FOURIER-Transformation nur bei bestimmten Frequenzen ausgewertet wird. Die Grundlage der Transformation sei eine im Rahmen einer Messung bestimmte Zeitreihe  $(y_n)$  mit einer zu gewissen äquidistanten Zeitpunkten gemessenen Anzahl von  $N$  Werten einer Messgröße. Dann kann die diskrete FOURIER-Transformierte  $Y_{k+1}$  wie folgt berechnet werden [Thuselt u. Gennrich, 2013]:

$$Y_{k+1} = \sum_{n=0}^{N-1} y_{n+1} \cdot e^{-2\pi i n \frac{k}{N}}, \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (3.30)$$

Das ursprüngliche Signal kann wie folgt verlustfrei rücktransformiert werden:

$$y_{n+1} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y_{k+1} \cdot e^{2\pi i n \frac{k}{N}}, \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (3.31)$$

Die Anwendung der Formeln beruht auf der Annahme, dass die Anzahl der betrachteten Frequenzen mit der Anzahl der Abtastpunkte übereinstimmt, das  $N$  im Nenner des Exponenten stammt von der Frequenzdiskretisierung. Die numerische Berechnung der DFT ist grundsätzlich möglich, jedoch bei Zeitreihen mit einer großen Anzahl an Datenpunkten enorm rechenaufwändig, da die Berechnung viele Rechenschritte erfordert. Beispielsweise müssen für 1024 Datenpunkte für jede der 1024 Frequenzkomponenten 1024 Produkte summiert werden, sodass rund eine Million Rechenoperationen erforderlich sind. Abhilfe schafft für diesen Umstand die *Fast-Fourier-Transformation*, welche im folgenden Kapitel behandelt wird.

## 3.4 Fast-Fourier-Transformation (FFT)

Zu Beginn der 1960er-Jahre führten Fortschritte in der Digitaltechnik zur verstärkten Anwendung von Verfahren der digitalen Signalverarbeitung. Im Rahmen der Spektralanalyse unter Verwendung der Diskreten-Fourier-Transformation (DFT) zeigte sich jedoch, dass eine hohe Frequenzauflösung die Verwendung großer Transformationslängen erforderte. Dies stellte insbesondere im Hinblick auf die Echtzeitfähigkeit digitaler Signalverarbeitungssysteme eine erhebliche Herausforderung dar, da die Verarbeitungsgeschwindigkeit häufig nicht ausreichte, um Ausgangsdaten in derselben Rate zu erzeugen, mit der Eingangsdaten zugeführt wurden [Werner, 2009].

Im Jahr 1965 veröffentlichten JAMES W. COOLEY und JOHN W. TUKEY ein algorithmisches Verfahren, das speziell auf die effiziente Berechnung der DFT bei großen Datensätzen ausgelegt war [Cooley u. Tukey, 1965]. Dieser sogenannte Fast-Fourier-Transform (FFT)-Algorithmus ermöglichte eine signifikante Reduktion des Rechenaufwands und eröffnete damit vielfältige Anwendungsmöglichkeiten für die spektrale Analyse in Echtzeit und in anderen Bereichen der digitalen Signalverarbeitung.

Der Ansatz von [Cooley u. Tukey, 1965] beruht darauf, den Rechenaufwand zu verringern, indem man die DFT von  $N$  Werten, sogenannte „Linien“, in zwei Teil-DFT's von jeweils  $N/2$  Linien zu zerlegen. Dafür würden dann nur noch  $2 \cdot \left(\frac{N}{2}\right)^2 = \frac{N^2}{2}$  komplexe Rechenoperationen notwendig sein, zuzüglich des Aufwands, der durch die Zusammenfassung der so ermittelten Teilergebnisse zum Gesamtergebnis entsteht. Dann wird auf diese Weise iterativ fortgefahrene, bis in  $\log_2 N$  Schritten bei elementaren DFT's von nur zwei Werten angekommen ist. Dieser Umstand ist nebenbei dafür verantwortlich, dass die FFT stets eine Anzahl von  $2^n$  Messwerten braucht, um verwendbare Ergebnisse zu erhalten. Nachgewiesenermaßen verringert das beschleunigte Verfahren nach JAMES W. COOLEY und JOHN W. TUKEY den Rechenaufwand der Transformation erheblich, weshalb sie als „Schnelle Fourier-Transformation“ oder engl. „Fast-Fourier-Transform, FFT“ bezeichnet

wird [Hoffmann u. Wolff, 2014]. Unter diesem Begriff werden heute verschiedene Verfahren zusammengefasst, deren erste Ansätze unter anderem bis auf C. F. GAUSS (1805) zurückzuführen sind. Je nach Anwendung, wobei auch Überlegungen zur verwendeten Hardware (Prozessorarchitektur, Speicherausstattung, u.Ä.) einfließen, werden verschiedene Algorithmen der FFT eingesetzt [Werner, 2009]. Des Weiteren können wichtige Kernpunkte und Erkenntnisse zur FFT wie folgt zusammengefasst werden:

- Die FFT ist kein eigenständiges Verfahren im Rahmen der Spektralanalyse, sondern eine numerisch effiziente Ausführungsvorschrift der DFT.
- Die FFT verringert den Rechenaufwand an komplexen Rechenoperationen, welche zur Berechnung der Spektrallinien der DFT notwendig sind von etwa  $N^2$  Messwerten (bei der DFT) auf  $N \cdot \log N$  (bei der FFT). [Tabelle 3.1](#) verdeutlicht den enormen Unterschied zwischen DFT und FFT im Rechenaufwand anhand beispielhafter Anzahl von Messdaten. Die Entwicklung des Verfahrens trug maßgeblich dazu bei die Spektralanalyse mit Fourier-Transformationen echtzeitfähig zu machen.

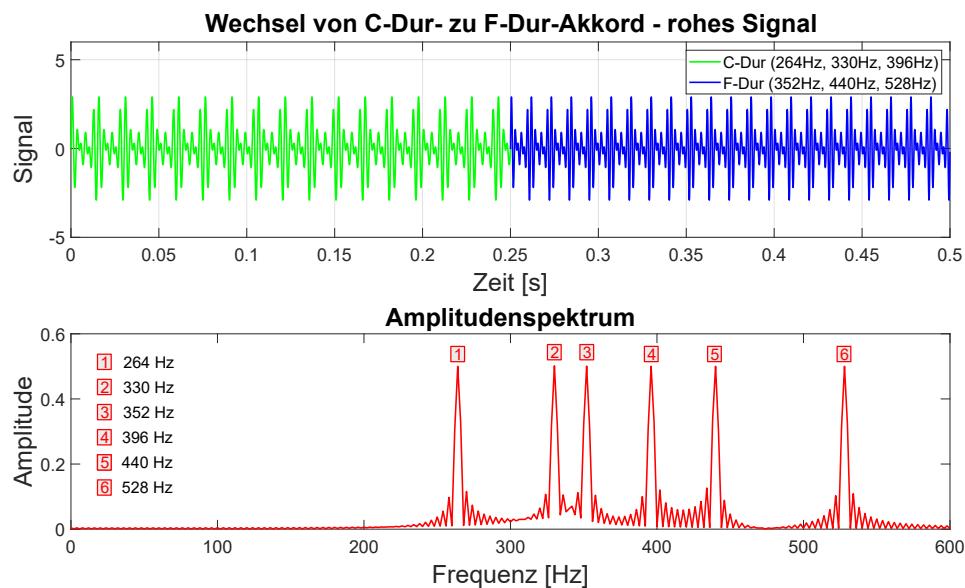
$N$	$N^2$	$N \ln N$
32	1 024	160
128	16 384	896
2 048	4 194 304	22 528

*Tabelle 3.1:* Anzahl Rechenoperation DFT vs. FFT  
bei beispielhafter Anzahl Messdaten

- Aufgrund des Ansatzes, dass die Zahl der Abtastwerte im Rahmen der FFT schrittweise halbiert wird, bis elementare Transformationen von jeweils zwei Abtastwerten übrig bleiben, ist vorausgesetzt, dass die Zeitreihe die Länge einer Zweierpotenz aufweist.
- Aufgrund der Symmetrie der Hin- und Rücktransformation der DFT lässt sich der FFT-Algorithmus mit geringen Modifikationen für die Rücktransformation verwenden.

Der oben vorgestellte Grundgedanke der FFT kann algorithmisch auf verschiedene Weisen umgesetzt werden. Der bis heute gebräuchlichste Algorithmus ist der *Radix-2-FFT-Algorithmus*. Dieser erreicht effektiv schnellere Berechnungszeiten durch geschickte Faktorisierung von Matrizen, welche die Transformationsgleichungen als lineare Gleichungssysteme enthalten. Aufgrund von Periodizitäten in den Berechnungen können Symmetrien ausgenutzt werden und mit der Faktorisierung der entsprechenden Matrizen wird die Ermittlung einer Vielzahl von Werten eingespart. Auch bei der Radix-2-FFT ist die Grundvoraussetzung, dass die Abtastpunkte in einer Anzahl einer Zweierpotenz vorliegen. Die exakte Wirkungsweise der Radix-2-FFT und weiterer FFT-Algorithmen ist in der einschlägigen Fachliteratur detailliert beschrieben, diese Herleitungen sind für den Umfang dieser Arbeit nicht zielführend. Es wird beispielsweise auf [Mertins, 2023, S.190 ff.], [Hoffmann u. Wolff, 2014, S.129 ff.] oder [Werner, 2009, S.37 ff.].

Die Darstellung des Ergebnisses der FFT ist das sogenannte Amplitudenspektrum, welches dem Betragsspektrum entspricht und die im Signal ermittelten Amplituden über den Frequenzen abträgt. Ein anschauliches Beispiel bietet hierbei eine simulierte Zeitreihe, die ein Audiosignal enthält, das hier verwendete Beispiel ist dabei an [Thuselt u. Gennrich, 2013] angelehnt. Hier wird die Hälfte der Zeit ein C-Dur-Akkord abgetastet, der aus einer Überlagerung von Schwingungen aus drei Frequenzen (264 Hz, 330 Hz, 396 Hz) besteht und die Töne c', e' und g' abbildet. Ab der zweiten Hälfte der Zeitreihe erfolgt ein abrupter Wechsel auf einen F-Dur-Akkord, der aus einer Überlagerung von Schwingungen mit den Frequenzen 352 Hz, 440 Hz und 528 Hz besteht und die Töne f', a' und c'' abbildet. Das Audiosignal sowie das dazugehörige Amplitudenspektrum sind aus der folgenden Abbildung zu entnehmen.



*Abbildung 3.4:* Simulierte Daten: Rohdaten und Amplitudenspektrum eines Akkordwechsels von C-Dur auf F-Dur, ausgewertet mittels FFT

Diese Darstellung und die Auswertung mittels der FFT bietet eine gute Lösung im Signal enthaltene Frequenzen und Amplituden zu detektieren. Wie anhand der vorangegangenen Abbildung zu entnehmen ist, ist es jedoch nicht möglich den zeitlichen Verlauf der Änderung von Frequenzen - wie bei dem Wechsel des C-Dur-Akkords auf den F-Dur-Akkord - zu ermitteln. Wir erkennen die im ausgewerteten Bereich der Zeitreihe gesamtheitlich auftretenden Frequenzen und Amplituden, verlieren jedoch die Information darüber, wann diese aufgetreten sind. Die zeitlichen Informationen gehen nicht verloren, dann könnte auch keine Rücktransformation auf das ursprüngliche Signal möglich sein; sie sind in den Phasen der komplexen Fourier-Koeffizienten enthalten, welche nicht ohne weiteres zugänglich sind. In manchen Anwendungen, vor allem in Bezug auf geodätische Zeitreihen, kann es von Vorteil sein, sowohl Frequenz und Amplitude, als auch das dazugehörige Zeintervall zu bestimmen. Abhilfe schafft hierbei die [Kurzzeit-Fourier-Transformation](#), welche Kerninhalt dieser Arbeit ist und im nächsten Kapitel ausführlich behandelt wird.

### 3.5 Kurzzeit-Fourier-Transformation (STFT)

Die zuvor behandelte FFT ist heute ein Grundstein der Spektralanalyse und das am häufigsten verwendete Werkzeug zur Ermittlung von in Signalen enthaltenen Frequenzen und Amplituden. Jedoch ist diese nicht fähig, zeitliche Änderungen dieser Größen darzustellen, wie der [Abbildung 3.4](#) zu entnehmen ist.

Eine Weiterentwicklung stellt hier die sogenannte Kurzzeit-Fourier-Transformation (engl. „Short-Time-Fourier-Transform“, STFT) dar. Bei der STFT wird die Zeitreihe in Zeitsegmente unterteilt und für jedes dieser Segmente eine separate Transformation durchgeführt. Für die Transformation wird das Segment mit einer um  $\tau$  zeitlich verschiebbaren Fensterfunktion  $g(t)$  multipliziert und die Fourier-Transformierte des gefensterten Signals berechnet. Nach erfolgter Transformation wird das Fenster entlang der Zeitachse um den Verschiebungsparameter  $\tau$  verschoben. Dieser Vorgang wird mit fortschreitenden Zeitpunkten  $t$  über die gesamte Länge der Zeitreihe durchgeführt. Die Ergebnisse der STFT werden in einem sogenannten Spektrogramm dargestellt. Während bei der FFT die Beträge der komplexen Fourier-Koeffizienten, also die Amplituden über den Frequenzen abgetragen werden, werden im Rahmen der STFT die Frequenzen über der Zeit abgetragen. Die Amplituden erhalten in dieser Darstellung einen Farbwert in Abhängigkeit von ihrer Größe. Diese Darstellung erlaubt den Bezug zu einer Zeitinformation. Aus dem Spektrogramm ist ablesbar, welche Frequenzen, mit welcher Amplitude, zu welcher Zeit im Signal auftreten. Dieser Umstand macht die STFT zum klassischen Werkzeug der *Zeit-Frequenz-Analyse*.

Die Multiplikation des Signals mit der Fensterfolge und der Position des Fensters innerhalb der Zeitreihe beziehungsweise der Verschiebung kann auf zwei verschiedene Arten dargestellt werden:

$$f_g(t, \tau) = f(t) \cdot g(\tau - t) \quad \text{oder} \quad (3.32)$$

$$f_g(t, \tau) = f(t) \cdot g(t - \tau). \quad (3.33)$$

Die zweite Variante bietet bei der Annahme  $g$  sei kausal, also  $g(t) = 0$  für  $t < 0$ , den Vorteil, dass das Analysefenster den Signalabschnitt unmittelbar *vor* dem Analysezeitpunkt  $\tau = t$  betrachtet, das Fenster ist rückwärtsgerichtet. Dieser Umstand macht die Auswertung echtzeitfähig [Hoffmann u. Wolff, 2014].

Das Analysefenster  $g(t - \tau)$  unterdrückt das Signal  $f(t)$  dabei außerhalb eines bestimmten Bereiches. Die Wahl der Fensterfunktion ist hierbei entscheidend für die Auswertung und die ermittelten Ergebnisse. Das bloße Ausschneiden eines Signalabschnitts, welches der Multiplikation der Zeitreihe mit einem Rechteckfenster entspricht, führt zu einer Verwischung des Spektrums durch den Einfluss des [Leck-Effekts](#). Durch die Wahl einer geeigneteren Fensterfunktion für die Anwendung der STFT kann dieser Effekt abgemildert werden. Gewünscht ist, eine gewisse Überlappung zu erreichen, das Fenster „gleitet“ über die Zeitreihe hinweg [Hoffmann u. Wolff, 2014].

Die Kurzzeit-Fourier-Transformation ist definiert als:

$$\hat{f}_g(F, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(t - \tau) e^{-2\pi i F t} dt. \quad (3.34)$$

Eine Rücktransformation auf das gefensterte Signal  $f_g(t, \tau)$  ist wie folgt möglich:

$$f_g(t, \tau) = f(t)g(t - \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}_g(F, \tau) e^{2\pi i F t} dF. \quad (3.35)$$

Eine Rücktransformation auf das *ungefensterte* Signal durchzuführen, ist nicht trivial und würde an dieser Stelle nicht zielführend sein. Eine ausführlich aufgearbeitete Herangehensweise bietet [Hoffmann u. Wolff, 2014, S.271].

Der Umstand, dass im Rahmen der geodätischen Zeitreihenanalyse zeitdiskrete Signale betrachtet werden, führt wie auch schon bei der Fourier-Transformation dazu, dass anstatt des Integrals wiederum auf eine Summe übergegangen werden muss. Die Kurzzeit-Fourier-Transformation lässt sich dann in folgender Form ausdrücken:

$$F_k^T = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y_n(t - \tau) e^{-2\pi i n \frac{k}{N}}, \text{ für } k = 0, 1, 2, \dots, N - 1. \quad (3.36)$$

Hierbei wird davon ausgegangen, dass die Rate der Abtastung des Signals um den Faktor  $N \in \mathbb{N}$  höher als die Rate ist, mit der das Spektrum berechnet wird. Die Anzahl  $n$  der Analysefenster werden mit  $y$  bezeichnet, sie sind zeitdiskret. Das Abtastintervall bei der Erzeugung der Datenpunkte ist als  $T = 1$  angenommen. Die Berechnung der Koeffizienten erfolgt unter Verwendung der FFT.

Wie angesprochen ist die Wahl der Fensterfunktion von großer Wichtigkeit für die Ergebnisse. Bezuglich des Fensterentwurfs können Fenster wie das HAMMING-, BARTLETT-, HANN- oder GAUSS-Fenster verwendet werden (siehe Beispiele der Fensterfunktionen in Abbildung 2.11). Verwendbar sind außerdem Prototypen für perfekt rekonstruierte, modulierte Filterbänke [Mertins, 2023]. Die besondere Verwendung des GAUSS-Fensters wird im nachfolgenden Kapitel 3.6 (Gabor-Transformation) im Detail behandelt.

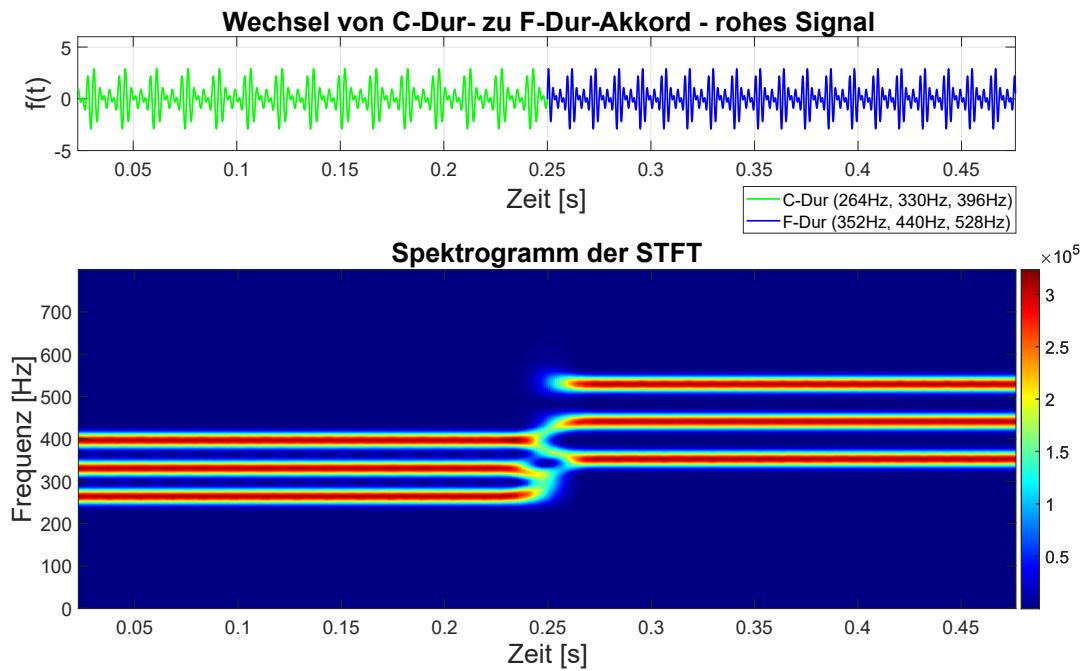
Neben dem Fensterdesign beziehungsweise der Auswahl der Fensterfunktion  $g(t)$ , hat die Fensterbreite  $\tau$  maßgeblichen Einfluss auf das Berechnungsergebnis, da die STFT dem Einfluss der sogenannten *HEISENBERGSchen Unschärferelation* unterliegt. Diese besagt, dass zwei komplementäre Eigenschaften eines Teilchens nicht gleichzeitig beliebig genau bestimmbar sind. In der Zeit-Frequenz-Analyse besteht im Konflikt zur geltenden HEISENBERGSchen Unschärferelation der Anspruch auf eine möglichst hohe Zeit- und gleichzeitig möglichst hohe Frequenz-Auflösung. Die Unschärferelation gibt jedoch die untere Grenze für die Fläche des Zeit-Frequenz-Fensters vor. In [Mertins, 2023, S.318 ff.] wird mathematisch hergeleitet, dass die Fläche eines Zeit-Frequenz-Fensters im Rahmen der

Kurzzeit-Fourier-Transformation nicht beliebig klein gemacht werden kann. Daraus folgt, dass keine beliebig gute Zeit-Frequenz-Auflösung erzielt werden kann.

Für die Praxis der Zeitreihenanalyse bedeutet dies, dass ein kurzes Analysefenster zwar eine gute Zeitauflösung mit sich bringt, allerdings unweigerlich eine schlechte Frequenzauflösung. Dieser Umstand verhält sich andersherum reziprok, eine gute Frequenzauflösung durch ein breites Analysefenster bringt unweigerlich eine schlechte Zeitauflösung mit sich. Wie sich diese Sachverhalte im Spektrogramm äußern und wie gute Zeit- oder gute Frequenzauflösung aussehen, und was für geodätische Zeitreihen die beste Kompromisslösung ist, wird in [Kapitel 4](#), dem Kapitel der praxisorientierten Datenauswertung, gezeigt.

Was hinsichtlich der Ergebnisdarstellung der Spektralanalyse das Amplitudenspektrum für die FFT ist, ist für die STFT das Spektrogramm. In diesem werden die im Signal enthaltenen Frequenzen über der Zeit abgetragen und die Amplituden erhalten einen Farbwert in Abhängigkeit ihres Betrages. Wenn hierbei eine hohe Frequenzauflösung gewählt ist, spricht man von einem Schmalbandspektrogramm. Bei Wahl einer hohen Zeitauflösung wird von einem Breitbandspektrogramm gesprochen [Hoffmann u. Wolff, 2014].

Anhand derselben Daten des Akkordwechsels, welche für die FFT in [Abbildung 3.4](#) verwendet wurden, kann die Stärke der STFT verdeutlicht werden. In der nachfolgenden Abbildung ist eindeutig erkennbar, wann die im Signal enthaltenen Frequenzen mit welcher Stärke auftreten. Die zeitliche Information des Eintretens und Abklingens der Frequenz ist im Amplitudenspektrum der FFT nicht ersichtlich.



*Abbildung 3.5:* Simulierte Daten: Rohdaten und Spektrogramm eines Akkordwechsels von C-Dur auf F-Dur, ausgewertet mittels STFT

## 3.6 Gabor-Transformation

„Für die Mehrheit der Menschen ist Arbeit die einzige Zerstreuung, die sie auf Dauer aushalten können.“

(Dennis Gábor, ungarischer Physiker, 1900 - 1979)

DENNIS GÁBOR (eigentlich Gábor Dénes, \*05. Juni 1900 in Budapest; †08. Februar 1979 in Paris) war ein ungarischer Ingenieur und Begründer der Gabor-Transformation, welche Kernthema und Kernwerkzeug der hier vorliegenden Arbeit ist. Er absolvierte 1920 das Studium der Ingenieurwissenschaften an der Technischen und Wirtschaftswissenschaftlichen Universität Budapest. Nach seiner Promotion 1927 ging er zur Siemens und Halske AG (heute Siemens AG) in Berlin, wo er seine ersten Erfindungen wie zum Beispiel die Hochdruck-Quecksilberdampflampe machte. Der von 1920 bis 1933 in Deutschland lebende GÁBOR war aufgrund seiner jüdischen Herkunft in Folge der politischen Entwicklungen in der Zeit des Nationalsozialismus gezwungen 1933 nach England zu emigrieren. 1947 entwickelte er das Prinzip der Holografie, für das er 1971 den Nobelpreis für Physik erhielt. Die Holografie ist eine Methode zur Aufzeichnung und Rekonstruktion eines Wellenfeldes. GÁBOR erfand das Verfahren zunächst zur Verbesserung des Auflösungsvermögens von Mikroskopen, später wurde es zur dreidimensionalen Abbildung von Objekten auf Wellenebene und weiteren Anwendungszwecken verwendet. GÁBOR starb 1979 als großer Erfinder und Denker seiner Zeit und war zuletzt Inhaber von über 100 Patenten [Siemens AG, 2016]. Folgende Abbildung zeigt ihn im Jahr 1971, in dem er den Nobelpreis für Physik erhielt.

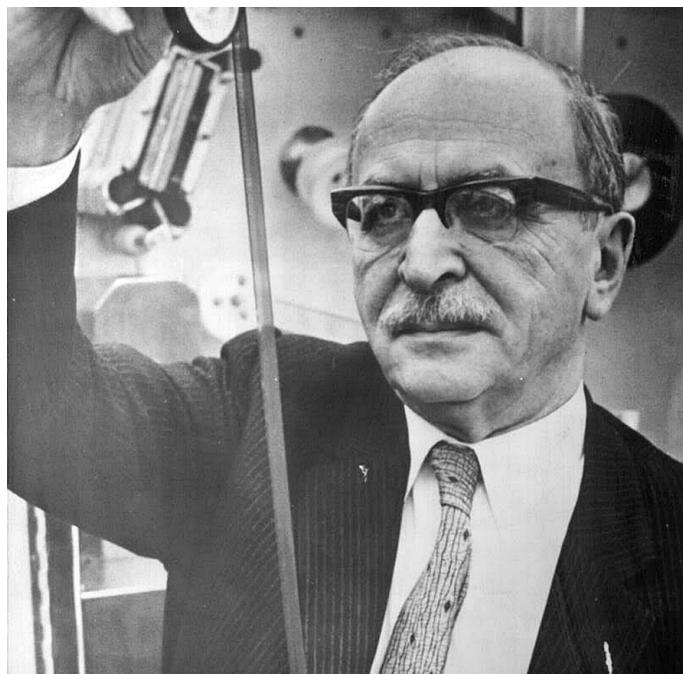


Abbildung 3.6: Dennis Gábor im Jahr der Nobelpreisverleihung 1971 [Commons, 2024]

Die Grundzüge der nach DENNIS GÁBOR benannten Gabor-Transformation postulierte er im Rahmen der Veröffentlichung [Gabor, 1946] im Jahre 1946. Die Gabor-Transformation stellt eine besondere Form der Kurzzeit-Fourier-Transformation dar und ist Kerninhalt dieser Arbeit. Wenn im Rahmen der Kurzzeit-Fourier-Transformation ein Gauß-Fenster als Fensterfunktion gewählt wird, so spricht man von der Gabor-Transformation. DENNIS GÁBOR wählte erstmalig ein Gauß-Fenster als Fensterfunktion und definierte die Gabor-Transformation wie folgt [Gabor, 1946]:

$$G(F, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t - \tau)e^{-2\pi i F t} dt \quad (3.37)$$

Da die Fourier-Transformierte einer Gauß-Funktion wiederum eine Gauß-Funktion ergibt, stellt die Gabor-Transformation sowohl im Orts- als auch im Frequenzraum gleichzeitig lokale Informationen dar. Das zugehörige Gabor-Filter besitzt die Eigenschaft, beliebige elliptische Regionen im Orts- beziehungsweise im Frequenzbereich überdecken zu können, wodurch eine anwendungsspezifische Anpassung der Analyseauflösung möglich wird [Hoffmann u. Wolff, 2014].

Ein wesentliches Merkmal der Gabor-Transformation besteht in ihrer Fähigkeit, unabhängig von der Wahl der Fensterposition, die maximal mögliche Auflösung sowohl im Orts- als auch im Frequenzraum zu realisieren. Diese Eigenschaft ergibt sich aus der Tatsache, dass die Gauß-Funktion die einzige Fensterfunktion ist, die das Minimum der HEISENBERG'schen Unschärferelation von

$$\sigma_g^2 \cdot \sigma_G^2 \geq \frac{\pi}{2} \quad (3.38)$$

erreicht. Dabei bezeichnet die  $\sigma_g^2$  Varianz der Fensterfunktion im Ortsraum (Ortsunschärfe) und  $\sigma_G^2$  die entsprechende Varianz im Frequenzraum (Frequenzunschärfe). Diese Beziehung verdeutlicht den reziproken Zusammenhang zwischen der Orts- (beziehungsweise Zeit-) und der Frequenzauflösung: Eine Verbesserung der Lokalisation in der einen Domäne geht zwangsläufig mit einer Verschlechterung in der anderen einher [Mertins, 2023].

Insbesondere folgt daraus, dass beispielsweise eine Verdopplung der Ortsauflösung nur unter Inkaufnahme einer Halbierung der Frequenzauflösung möglich ist und umgekehrt. Es lässt sich jedoch zeigen, dass die Gauß-Funktion als Fensterfunktion einen Optimalfall realisiert und damit hinsichtlich der Unschärferelation den bestmöglichen Kompromiss zwischen der Auflösung im Orts- (beziehungsweise Zeit-) und Frequenzraum gewährleistet. Deutlich wird, dass die Wahl des Gauß-Fensters, also

$$f_\sigma = \left( \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\pi \frac{t^2}{\sigma^2}}, \quad (3.39)$$

insofern optimal ist, als infolge dessen die linke Seite der HEISENBERGSchen Unschärferelation

$$\Delta f \cdot \Delta t \geq \frac{1}{4\pi}, \quad (3.40)$$

also das Produkt  $\Delta f \cdot \Delta t$  minimiert wird. Dies ist nur im speziellen Fall der Verwendung einer Gauß-Funktion als Fenster möglich [Kroschel et al., 2011]. Aus dem Grund des bestmöglichen Kompromisses zwischen der Auflösung im Ortsraum und der Auflösung im Frequenzraum wird im Rahmen dieser Arbeit die Gabor-Transformation zur Auswertung der geodätischen Zeitreihen im Kontext der Kurzzeit-Spektralanalyse verwendet.

Analog zu den in diesem Kapitel bisher behandelten Transformationen muss auch bei der Gabor-Transformation zur Auswertung geodätischer Zeitreihen von der kontinuierlichen Integralform auf eine Summenform beziehungsweise Reihenentwicklung übergegangen werden. Dafür werden die Parameter der Frequenz  $f$ , der Zeit  $\tau$  und der Verschiebung des Zeitfensters  $t$  diskretisiert, indem man diskrete Frequenzen  $F = \frac{n}{NT}$  mit  $T$  als Abtastperiode und  $N$  als Anzahl diskreter Frequenzen einführt. Außerdem wird für die diskreten Parameter, für die Zeit und die Verschiebung der Fensterfunktion  $k = \frac{t}{T}$  eingeführt. Damit erhält man für die diskrete Gabor-Transformation [Kroschel et al., 2011]:

$$Y_{k,m} = \sum_{n=0}^{N-1} y_n g(t - \tau) e^{-2\pi i n \frac{k}{N}}. \quad (3.41)$$

Die Rücktransformation des zeitdiskreten Signals  $y_n$  im Zeitfenster  $m$  lässt sich durch die inverse DFT aus den Koeffizienten  $Y_{k,m}$  wie folgt gewinnen [Kroschel et al., 2011]:

$$y_{n,m} = \sum_{k=0}^{N-1} Y_{k,m} g(t - \tau) e^{2\pi i n \frac{k}{N}}. \quad (3.42)$$

Auf Grundlage der nun herausgearbeiteten Eigenschaften und Vorzügen der Gabor-Transformation gegenüber anderen Verfahren der Kurzzeit-Spektralanalyse wird diese als hauptsächliches Werkzeug zur Auswertung geodätischer Zeitreihen im Rahmen dieser Arbeit und als Kernthema gewählt. In den folgenden Kapiteln wird die Gabor-Transformation praktisch angewandt und sowohl an simulierten Daten, Labordaten, als auch an realen Messdaten eines Überwachungsobjekts validiert. Durch diese wissenschaftliche Herangehensweise wird die Eignung der Gabor-Transformation - welche bisher im Fachgebiet der Geodäsie wenig Anwendung findet - auf ihre Eignung zur Auswertung geodätischer Zeitreihen geprüft.



# 4 Auswertung von Zeitreihen mittels der Gabor-Transformation

„Miss alles, was sich messen lässt, und mach alles messbar, was sich nicht messen lässt.“

(Archimedes von Syrakus, 287 v. Chr. - 212 v. Chr)

Nach vorheriger Darlegung der Grundlagen der Gabor-Transformation folgt nun die praktische Anwendung auf geodätische Messdaten und Zeitreihen. Zur Validierung der Gabor-Transformation für diesen Anwendungszweck ist die Auswertung dreistufig aufgebaut. Im ersten Teil werden Zeitreihen in der Software MATLAB® von SIMULINK simuliert, um die Reaktion der Gabor-Transformation auf Anomalien in den Zeitreihen wie Datensprünge, Datenlücken, Trends und Ähnliches zu testen.

Im Zweiten Teil werden Daten ausgewertet, die an der Hochschule Neubrandenburg unter Laborbedingungen mit einem Schwingungserzeuger erhoben wurden. Anhand dieser Daten kann die Wirkungsweise der Gabor-Transformation unter realistischen Messbedingungen und Effekten wie zum Beispiel realem Messrauschen auf Sensorseite erforscht werden.

Im letzten Teil soll die Gabor-Transformation auf Zeitreihen angewendet werden, die an realen Überwachungsobjekten im Raum Neubrandenburg im Rahmen von vorherigen Messkampagnen erhoben wurden. Eine kurze Beschreibung der Überwachungsobjekte folgt in [Kapitel 4.4](#). Auf den folgenden Seiten wird sowohl die praktische Auswertung mittels der Gabor-Transformation beschrieben, als auch gleichzeitig eine Ergebnisinterpretation vorgenommen. Die so ermittelten Ergebnisse werden in direkter Weise mit den Ergebnissen des erprobten Spektralanalyseverfahrens mittels der Fast-Fourier-Transformation verglichen. Der Datenerhebungs- und Auswerteablauf mittels der Gabor-Transformation ist analog zu dem der Kurzzeit-Fourier-Transformation und kann durch folgendes Blockschaltbild veranschaulicht werden. Aus diesem wird besonders die Bedeutung der Fensterung und der Wahl der Fensterfunktion deutlich. Die essentielle Wichtigkeit der Fensterfunktion für den Algorithmus wurde analog für die Gabor-Transformation im [Kapitel 3.5](#) der STFT beschrieben.

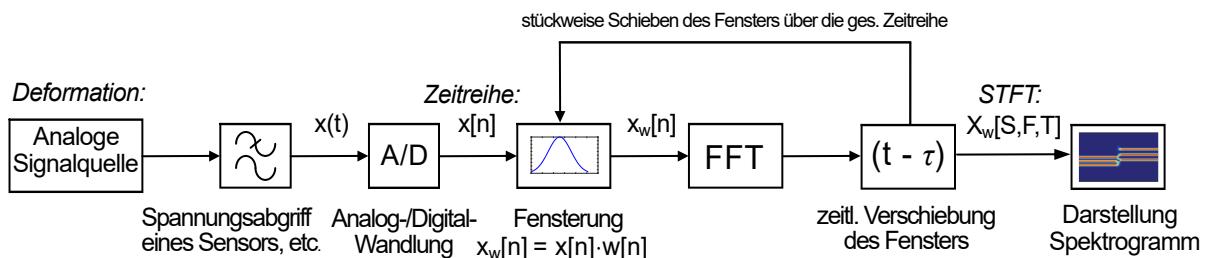


Abbildung 4.1: Blockschaltbild der Funktionsweise der Gabor-Transformation

Ein Schwingungsprozess beziehungsweise eine Deformation wird als analoge Signalquelle zunächst von einem Sensor als analoger Messwert in Form einer Spannung mit ei-

ner Abtastfrequenz abgegriffen. Der analoge Messwert wird dann über einen Analog-Digitalwandler in ein digitales Signal umgewandelt. Dieses digitale Signal stellt die Zeitreihe dar. Zur Auswertung wird diese durch die Fensterfunktion (im Falle der Gabor-Transformation das GAUSS-Fenster) gefenstert und das gefensterte Segment der Zeitreihe durch die FFT ausgewertet. Im Anschluss wird das Analysefenster durch den Verschiebungspараметer  $\tau$  entlang der Zeitachse verschoben. Dieser Prozess wird iterativ über den gesamten zeitlichen Verlauf der Zeitreihe wiederholt. Die Ergebnisse werden durch die in der Software MATLAB integrierte Funktion zur Kurzzeit-Fourier-Transformation berechnet. Der Funktion „*spectrogram*“ werden die Parameter *Messwerte/Abtastpunkte*, *Fensterfunktion*, *Überlappung*, *Anzahl Abtastpunkte* und *Abtastfrequenz* übergeben. Ausgegeben werden *Amplitude*, *Frequenz* und *Zeitinformation*. Die Steuerung der STFT und die Einstellungsparameter sowie die dadurch beeinflussten Ergebnisse, zum Beispiel hinsichtlich der Zeit- und Frequenzauflösung, werden in den entsprechenden Kapiteln der praktischen Auswertung erläutert.

## 4.1 Auswertung von simulierten Daten

Im ersten Schritt der Validierung der Gabor-Transformation zur Auswertung geodätischer Zeitreihen soll die Gabor-Transformation zunächst auf in der Software MATLAB® simulierte Schwingungsdaten angewendet werden. Ziel dabei ist die Reaktion des Auswerteargorithmus auf unter Umständen in der Realität im Messalltag vorkommende Artefakte in den Daten zu testen. Hierzu gehören die in [Kapitel 2.4](#) behandelten Effekte, welche die Spektralanalyse im Allgemeinen negativ beeinflussen können. Die Gründe für die Effekte wurden im genannten Kapitel behandelt und sind meist auf den Sensor, die Datenkommunikation oder die äußerlich wirkenden Umstände zurückzuführen. Die nachfolgenden Auswertungen orientieren sich an diesem Kapitel und behandeln die gleichen Effekte, um eine Vergleichbarkeit mit der Wirkung dieser auf die FFT herzustellen.

In Vorbereitung müssen zunächst die zur Verfügung stehenden Stellschrauben der STFT beziehungsweise der Gabor-Transformation veranschaulicht werden. Einstellmöglichkeiten wurden in MATLAB® entsprechend der Wirkungsweise der STFT in Form von einer einstellbaren Fensterbreite und einem einstellbaren Verschiebungsparameter geschaffen. Da in der STFT pro Fenster technisch eine FFT ausgeführt wird, muss die Fensterbreite eine Zweierpotenz der Form  $2^n$  sein. Der Verschiebungsparameter legt fest, um wie viele Messwerte das Auswertefenster verschoben wird, bevor die nächste FFT gerechnet wird. Als Fensterfunktion zur Dämpfung der Messwerte wird für alle folgenden Auswertungen das GAUSS-Fenster gewählt.

### 4.1.1 Kompromiss aus Zeit- und Frequenzauflösung

Anhand der folgenden Auswertungen soll zunächst eine gute Frequenzauflösung infolge eines breiten Auswertefensters einer guten Zeitauflösung infolge eines schmalen Auswer-

tefensters gegenübergestellt werden. Um zu zeigen, wie es idealerweise aussehen soll, wird mit dem Kompromiss zwischen Frequenz- und Zeitauflösung gestartet. Datengrundlage ist eine simulierte Sinusschwingung.

Damit der Vorteil einer guten Zeitauflösung überhaupt erkennbar wird, müssen in der Zeitreihe Veränderungen hinsichtlich der Frequenz des Signals auftreten, welche man zeitlich einordnen, beziehungsweise zeitlich voneinander trennen möchte. Realisiert wird dies in der simulierten Zeitreihe durch eine Änderung der Frequenz nach dem ersten und zweiten Drittel der Messzeit. Es wird zunächst eine Grundschwingung mit einer Frequenz von 0,2 Hz und einer Amplitude von 0,5 erzeugt. Die Schwingung wurde mit 20 Hz abgetastet, die Gesamtdauer beträgt 100 s. Es stehen somit 2000 Werte für die Zeitreihe zur Verfügung. Nach einem Drittel der Zeit steigt die Frequenz auf 0,5 Hz, nach zwei Dritteln der Zeit auf 0,8 Hz. Für die Fensterbreite wurden  $2^9$ , also 512 Werte gewählt, für den Verschiebungsparameter 1, also wird das Fenster pro Auswertung um 1 Messwert weiterverschoben. Es folgen die Rohdaten, das Spektrogramm der Gabor-Transformation, sowie das Amplitudenspektrum der FFT als dreigeteilte Darstellung.

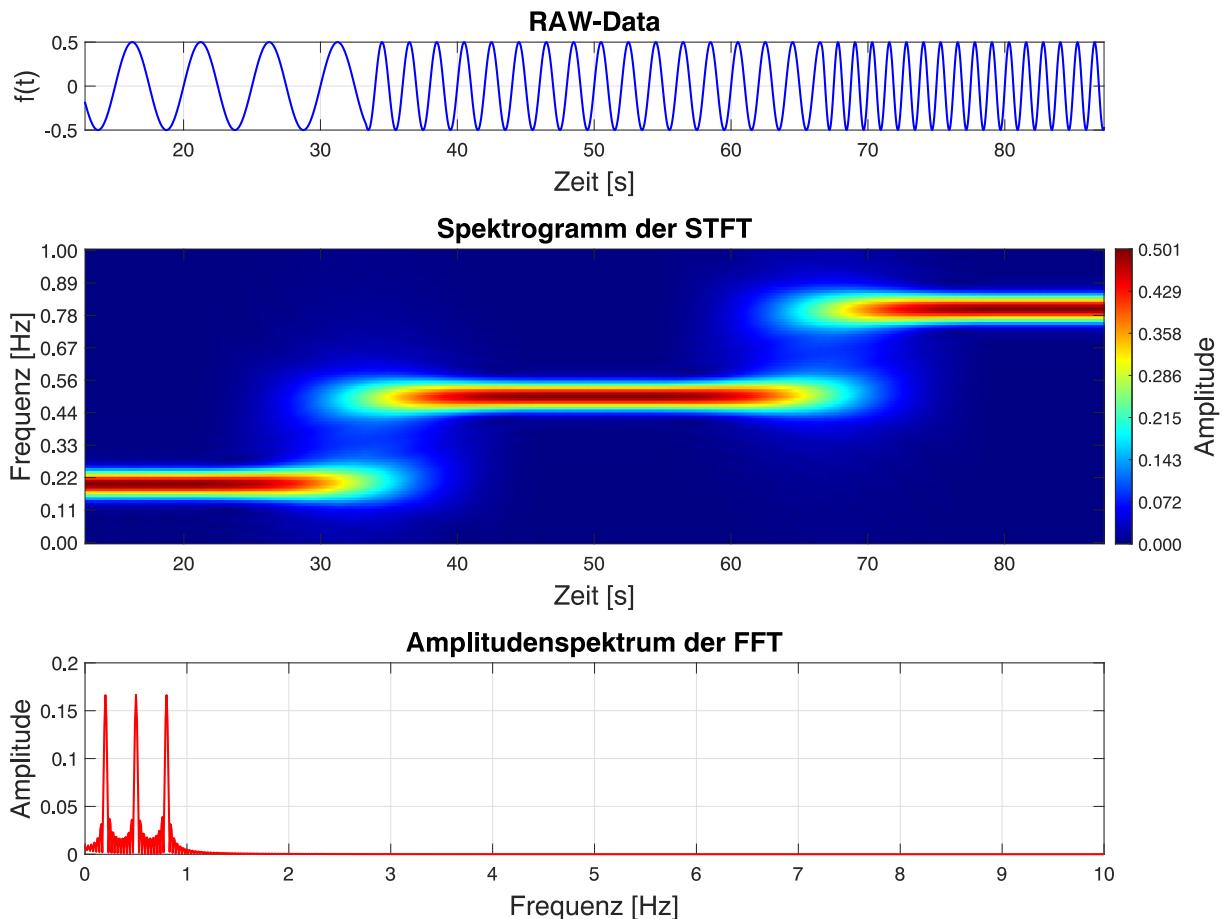


Abbildung 4.2: Simulierte Daten: Rohdaten, Spektrogramm und Amplitudenspektrum, Kompromiss aus Zeit- und Frequenzauflösung

Aus der Abbildung 4.2 wird deutlich, dass Frequenz und Amplitude scharf aufgelöst sind, sodass das Einsetzen der „Events“ zeitlich klar zuzuordnen ist. Auch sind die Frequenzen der Events ausreichend scharf quantifizierbar. In der direkten Gegenüberstellung mit dem Amplitudenspektrum der FFT ist der Vorteil der STFT beziehungsweise der Gabor-Transformation sofort zu erkennen - im Amplitudenspektrum gehen die zeitlichen Informationen komplett verloren. Wann welche Frequenz im Signal enthalten war, ist nicht abzulesen. Auch ein weiterer kritischer Nachteil der FFT ist in der Abbildung 4.2 ersichtlich. Wenn eine zu analysierende Signalkomponente (Frequenz plus dazugehörige Amplitude) nicht über das gesamte Auswertefenster konstant vorhanden ist, so wird die Amplitude im Amplitudenspektrum falsch ausgegeben. Aus dem Amplitudenspektrum in Abbildung 4.2 ist abzulesen, dass die von der FFT ermittelte Amplitude lediglich mit 0,16 statt der simulierten 0,5 ermittelt wurde, was einen drastisch zu niedrigen Wert darstellt. In den Untersuchungen ist auffällig, dass die Amplitude im beschriebenen Fall immer zu klein ausfällt. Dies ist besonders kritisch im Hinblick auf die Bewertung von Bauwerksdeformationen. Dort würde eine Alarmierung beim Überschreiten eines Grenzwertes ausfallen, da die Deformation beziehungsweise Amplitude von der FFT als zu klein ermittelt wird. Beheben lässt sich das Problem durch manuelle Fensterung in der FFT, in der ein Auswertefenster gewählt wird, in dem die zu analysierende Amplitude und Frequenz dauerhaft auftritt. Vorteilhaft bei Verwendung der Gabor-Transformation ist, dass eine solche manuelle Fensterung nicht stattfinden muss, da der Algorithmus automatisch fenstert. Zudem findet keine Falschausgabe der Amplituden statt.

### 4.1.2 Beispiel für schlechte Zeitauflösung, gute Frequenzauflösung

Mit der nächsten Auswertung soll ein Beispiel für eine schlechte Zeitauflösung am gleichen Datenbestand gezeigt werden. Hierbei ist die Länge des Auswertefensters auf  $2^{10}$ , also 1024 Werte - bei einer Gesamtlänge der Zeitreihe von 2000 Werten - verbreitert.

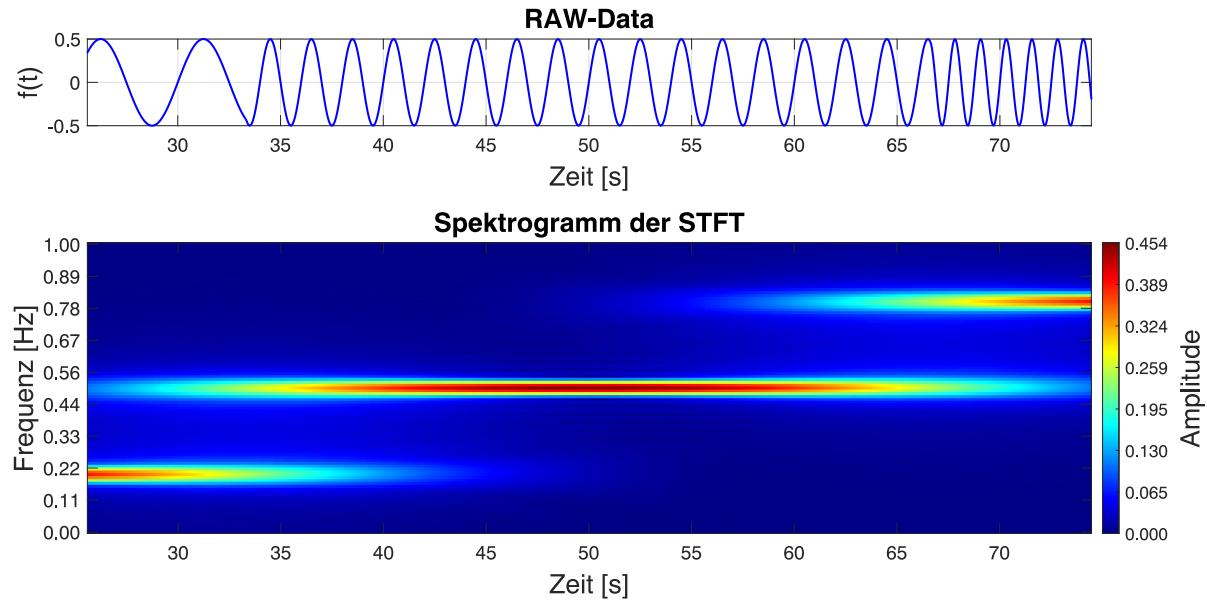


Abbildung 4.3: Simulierte Daten: Rohdaten und Spektrogramm, Beispiel für schlechte Zeitauflösung

Der Verlust der Zeitauflösung ist in Abbildung 4.3 deutlich erkennbar. Das Einsetzen der jeweils nächsten Frequenz ist zeitlich nicht klar vom Stoppen der vorherigen Frequenz zu trennen. Jedoch ist die Frequenzauflösung deutlich gestiegen. Die Events sind im Spektrogramm in Bezug auf die Frequenzachse deutlich schmäler geworden, die jeweilige Frequenz ist deutlicher quantifizierbar. Dieser reziproke Sachverhalt ist im Zusammenhang mit der HEISENBERG'schen Unschärferelation bereits ausführlich in Kapitel 3.6 erläutert worden.

### 4.1.3 Beispiel für schlechte Frequenzauflösung, gute Zeitauflösung

Es folgt das Beispiel der Auswertung mit schlechter Frequenzauflösung am gleichen Datenbestand. Die Länge des Auswertefensters ist hierfür auf  $2^6$ , also 64 Messwerte verkleinert worden. Der Verschiebungsparameter ist auf 1 belassen worden, wie auch schon im Rahmen der vorherigen Auswertungen.

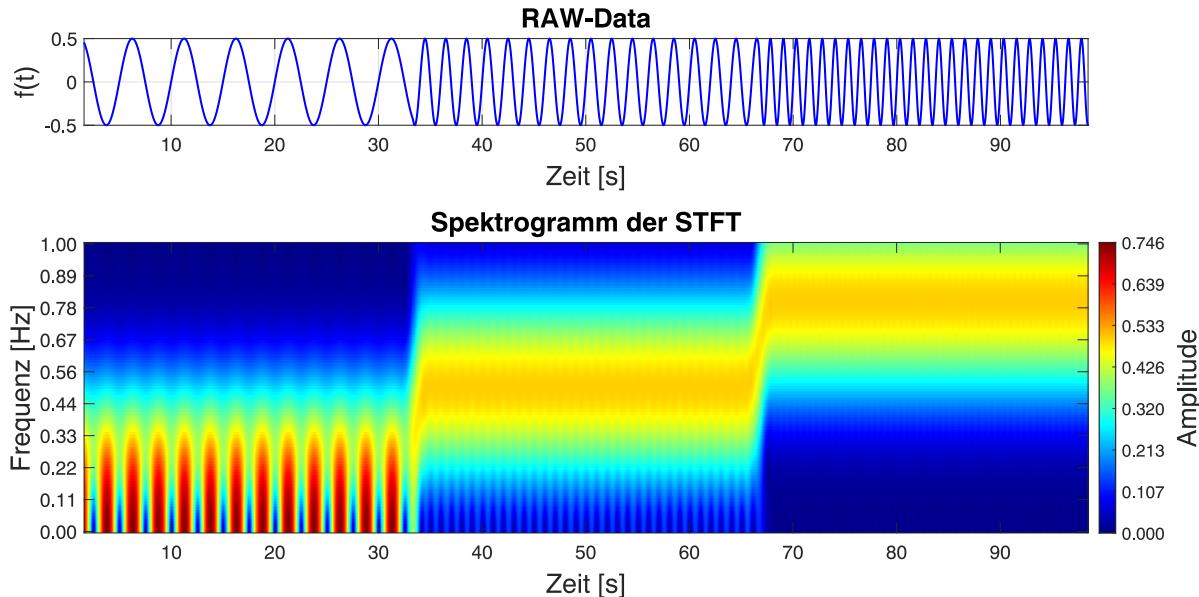


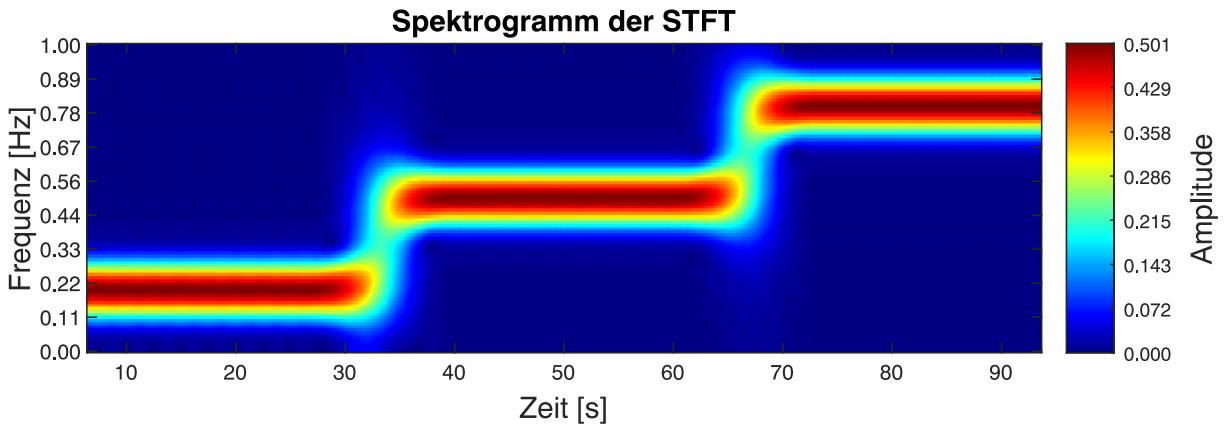
Abbildung 4.4: Simulierte Daten: Rohdaten und Spektrogramm, Beispiel für schlechte Frequenzauflösung

Hier wird deutlich, dass das zeitliche Einsetzen der unterschiedlichen Frequenzen klar zu trennen ist, die Frequenzauflösung ist allerdings so schlecht, dass es unmöglich wird, die Frequenzen der einzelnen Events zu quantifizieren. Auch das Quantifizieren der Amplitude der Schwingung ist nicht mehr möglich. Aus dem Vergleich der Abbildungen mit schlechter Zeit- und mit schlechter Frequenzauflösung (Abbildung 4.3 vs. Abbildung 4.4) ergibt sich eine mögliche Lösung beziehungsweise ein „Workflow“ für den Kompromisszwang zwischen den Auflösungen: Denkbar wäre zunächst eine besonders gute Frequenzauflösung zu schalten, daraus die Frequenzen und Amplituden zu quantifizieren, und im Anschluss eine besonders gute Zeitauflösung zu schalten, um dort die relevanten Zeitpunkte zu quantifizieren, und diese Informationen zum Schluss zusammenzuführen.

Im Rahmen der Tests ist auf dem Weg zwischen einer Kompromisslösung und der schlechten Frequenzauflösung eine Besonderheit aufgetreten, welche in nachfolgender Abhandlung zu Sonderfällen behandelt wird.

### Sonderfall: Grenzbereich und Ausfließen der Frequenzen

Bei einer Fensterbreite des Auswertefensters von  $2^8$ , also 256 Messwerten, scheinen die Frequenzen „ineinander zu fließen“ . Dieser Effekt ist in der nachfolgenden Abbildung ersichtlich.



*Abbildung 4.5:* Simulierte Daten: Spektrogramm, „Ausfließen der Frequenzen“

Eine Begründung für dieses Phänomen liegt in der Tatsache, dass das Auswertefenster, wenn es über einen Event- oder Frequenzwechsel gleitet, diesen zu immer größeren Anteilen abbildet, je kleiner das Auswertefenster gewählt wird. Es entstehen ähnliche Probleme zu jenen im Amplitudenspektrum der FFT, wenn Signalkomponenten nicht mehr durchgängig über das gesamte Auswertefenster vorhanden sind.

### Sonderfall: Geringe Zahl von Analysefenstern

Weiterführend ist interessant, welche Folgen auftreten, wenn insgesamt zu wenige Fenster zur Auswertung zur Verfügung stehen. Dieser Umstand kann durch einen besonders hohen Verschiebungsparameter bei gleichzeitig vergleichsweise breitem Fenster simuliert werden. Die Verschiebung wird auf 500 Messwerte gesetzt, die Fensterbreite auf  $2^9$  also 512. Damit entstehen lediglich drei Auswertefenster und es kommt zu nachfolgendem Ergebnis:

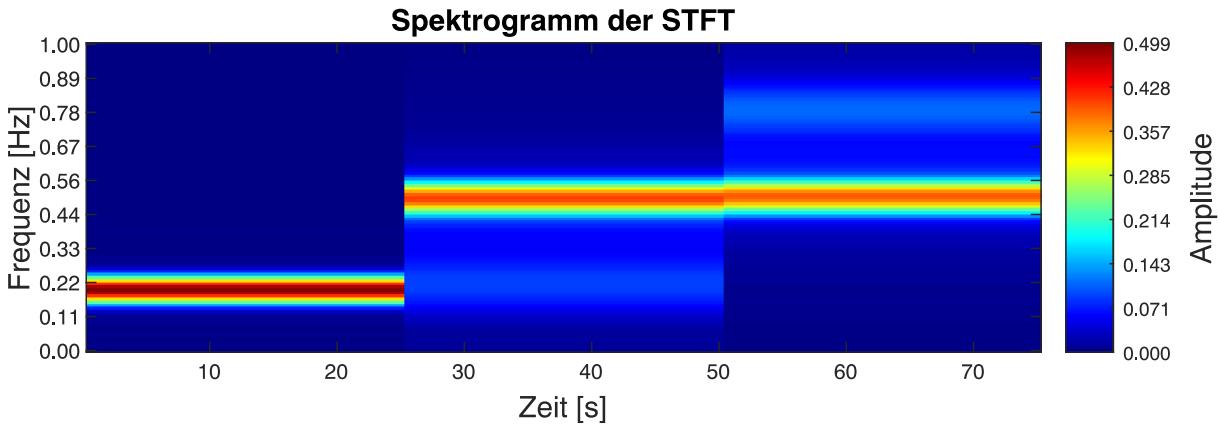


Abbildung 4.6: Simulierte Daten: Spektrogramm, geringe Zahl an Analysefenstern

Spannend ist, dass in diesem Fall die beiden letzten Events miteinander verschwimmen und zu einem Event werden. Das zweite Event ist mit seinen 0,5 Hz realitätsgerecht analysiert, die 0,8 Hz vom letzten Event gleichen sich jedoch komplett den 0,5 Hz an. Hierfür könnten ähnliche Umstände verantwortlich sein, wie beim Ausfließen der Frequenzen.

#### 4.1.4 Auswertung einer Zeitreihe ohne Rauschen

Im weiteren Verlauf der Auswertung mit simulierten Daten wird ein anderer Datenbestand verwendet, um die Reaktion des Auswertealgorithmus auf die bereits in [Kapitel 2.4](#) thematisierten Effekte zu testen. Erzeugt wird hierfür eine sinusförmige Schwingung mit einer Amplitude von 0,5 einer Frequenz von 0.5 Hz, die mit einer Frequenz von 20 Hz über einen Zeitraum von 100 s abgetastet wird. Es folgt zunächst ein Analyseergebnis als Referenz ohne Rauschen oder jegliche weitere Modifikationen.

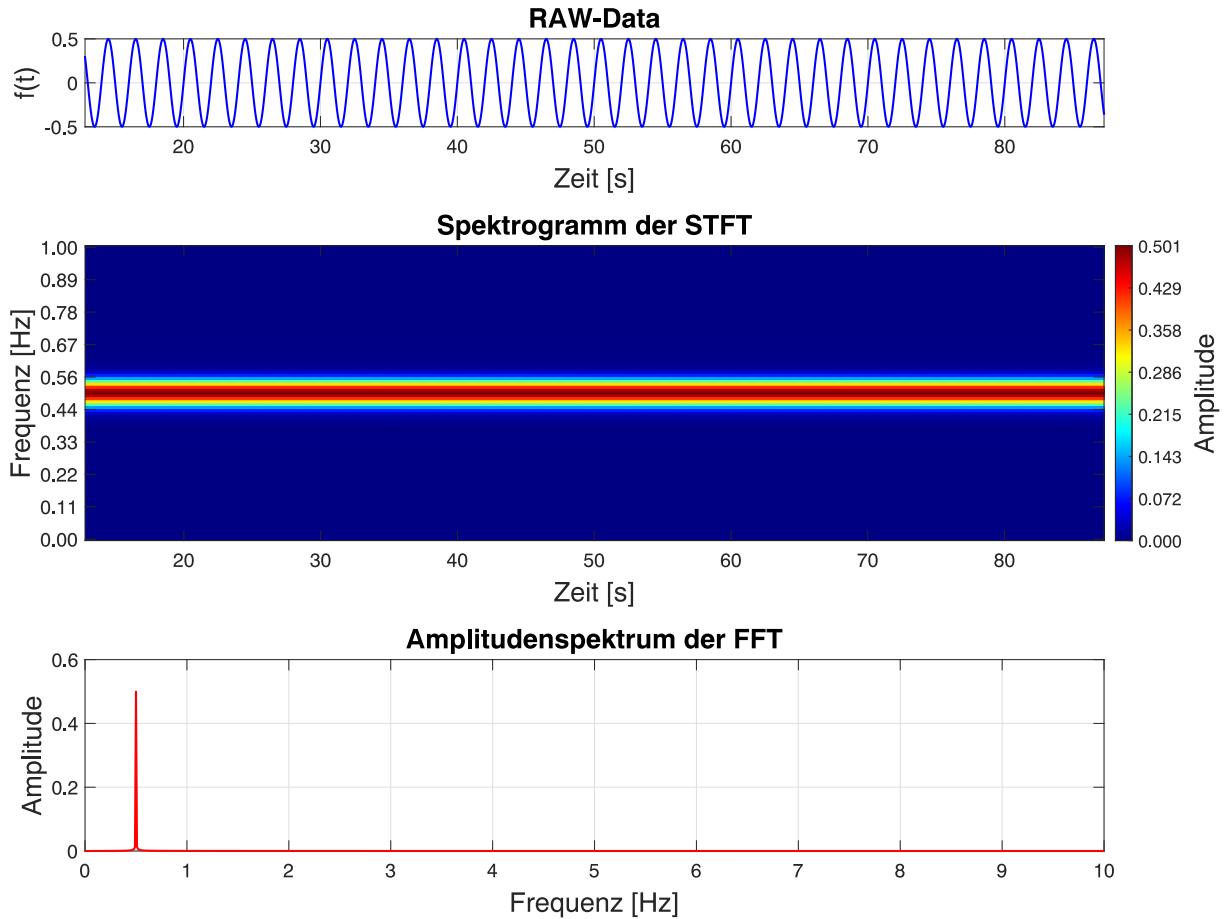


Abbildung 4.7: Simulierte Daten: Spektrogramm, ohne Rauschen

#### 4.1.5 Auswertung einer Zeitreihe mit Rauschen

Im Anschluss werden die Schwingungsdaten normalverteilt mit einer Standardabweichung des Rauschens von 0,7 verrauscht, um die Reaktion des Spektrums auf das Rauschen zu testen.

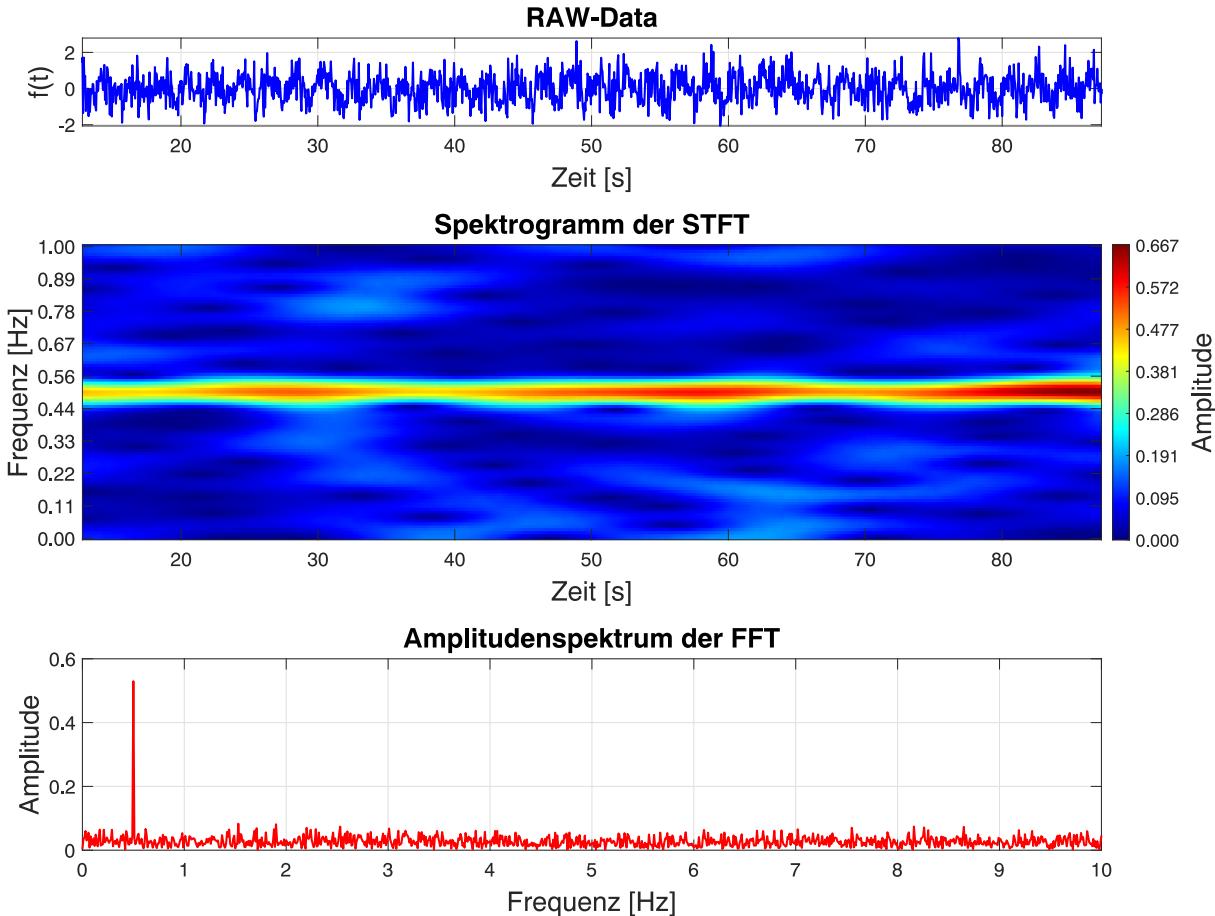


Abbildung 4.8: Simulierte Daten: Spektrogramm, mit normalverteiltem Rauschen, Std.=0.7

Der Algorithmus scheint hierbei verhältnismäßig robust gegen geringe Rauschanteile zu sein. Ein klarer Informationsgewinn aus dem Spektrogramm ist noch möglich. Das Grundrauschen äußert sich gleichmäßig in allen Frequenzbereichen. Spannend ist hier, ab welcher Höhe des Rauschanteils keine sinnvollen Informationen mehr aus dem Spektrogramm abzulesen sind.

Hierfür wurde die Standardabweichung des Rauschens auf 2,6 festgelegt. Es folgt das Analyseergebnis.

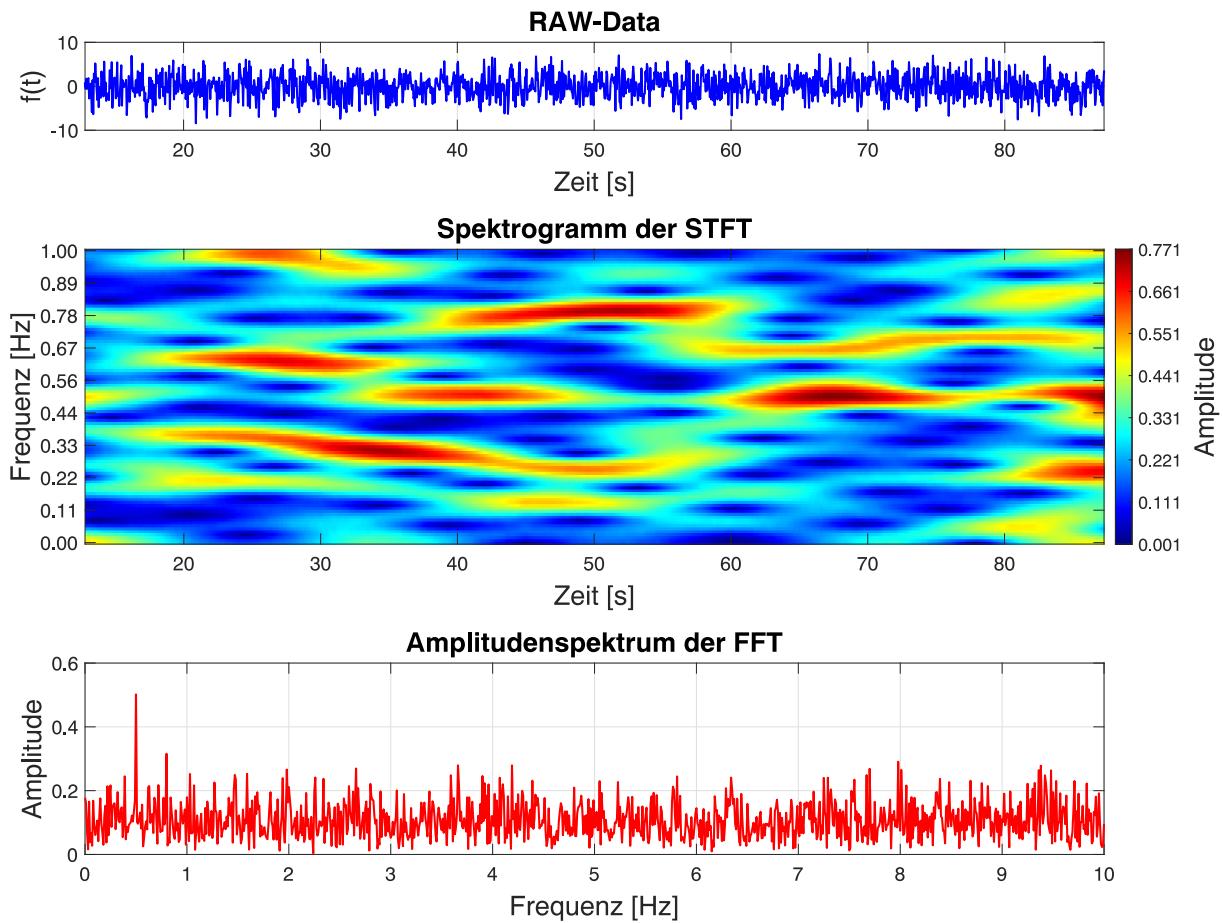


Abbildung 4.9: Simulierte Daten: Spektrogramm, mit normalverteiltem Rauschen, Std.=2.6

Sofort fällt auf, dass aus dem Spektrogramm keine sinnvollen Ergebnisse mehr ablesbar sind. Interessant ist jedoch der Umstand, dass sich aus dem Grundrauschen im Amplitudenspektrum der FFT eine Spur bei 0,5 Hz erhebt, bei der es sich erkennbar um das Signal handelt. Beim Vergleich des Betrages der Amplitude mit dem Grundrauschen kann bei dem vorliegenden Verhältnis jedoch nicht von Signifikanz gesprochen werden.

#### 4.1.6 Auswertung einer Zeitreihe mit linearem Trend

Der Zeitreihe mit dem geringeren Rauschniveau von 0,7 wird nun ein linearer Trend hinzugefügt. Die Trendparameter werden mit einem Offset von 0,2 und einem Maßstab von 0,1 festgelegt. Es folgt das Ergebnis der Gabor-Transformation der trendbehafteten Daten.

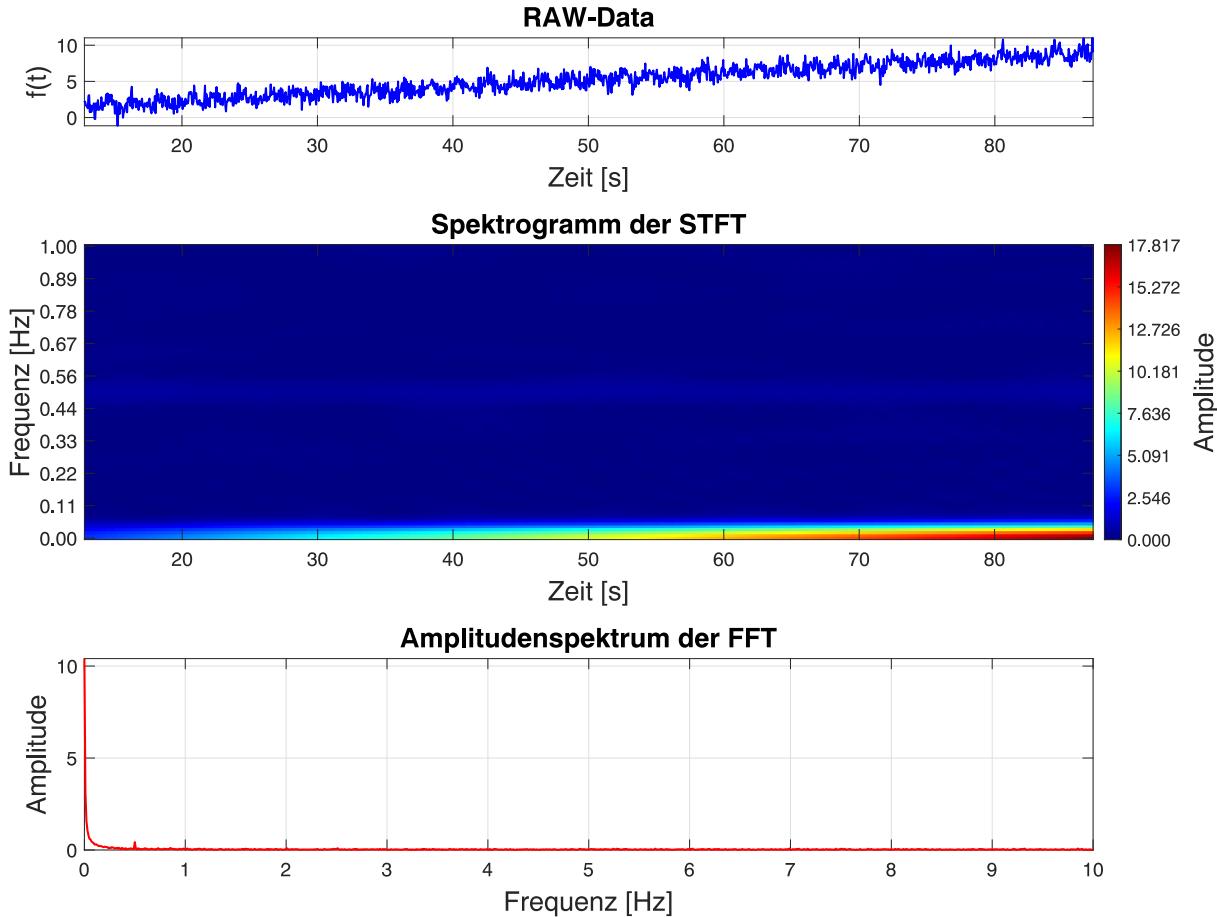


Abbildung 4.10: Simulierte Daten: Spektrogramm, mit normalverteiltem Rauschen, Std.=0,7, Trendfunktion mit  $b=0,2$ ,  $m=0,1$

Abbildung 4.10 zeigt, dass die spektralen Parameter der Trendfunktion im Spektrum die spektralen Parameter des Signals völlig überdecken. Wie schon in Kapitel 2.4.4 gezeigt, wird der Trend im Signal auch von der Gabor-Transformation als Schwingung mit extrem langer Periode und hoher Energie interpretiert. Aus diesem Grund zeigt sich im Spektrogramm ein Event mit sehr hoher Energie bei sehr niedriger Frequenz. Gleicher ist auch im Amplitudenspektrum der FFT erkennbar. Das ursprüngliche Signal bei 0,5 Hz lässt sich im Spektrogramm lediglich erahnen, nicht jedoch sachverständig interpretieren oder quantifizieren. Dieser Umstand zeigt erneut die Wichtigkeit einer sauberen Trendbefreiung der Daten in Vorbereitung der Spektralanalyse, ein unerlässlicher Schritt, wenn eine realitätsnahe und sachgemäße Analyse durchgeführt werden soll. Vor allem Sensorik, die

bekannt ist für starke Vulnerabilität in Bezug auf Driftverhalten, muss hier besonders akribisch auf Trends untersucht werden. Hierzu zählen vor allem Beschleunigungssensoren auf MEMS-Basis, deren starkes, teils temperaturabhängiges Trendverhalten entweder durch vorherige Kalibrierung oder nachträgliche Trendbeseitigung eliminiert werden muss.

#### 4.1.7 Auswertung einer Zeitreihe mit einer Datenlücke

Die nachfolgende Grafik zeigt die Auswertung des vorherigen Datenbestandes; statt des Trends ist die Zeitreihe mit einer Datenlücke behaftet. Die Datenlücke umfasst 600 Messwerte bei einer Länge der Zeitreihe von 2000 Messwerten, die Lücke umfasst also einen erheblichen Teil.

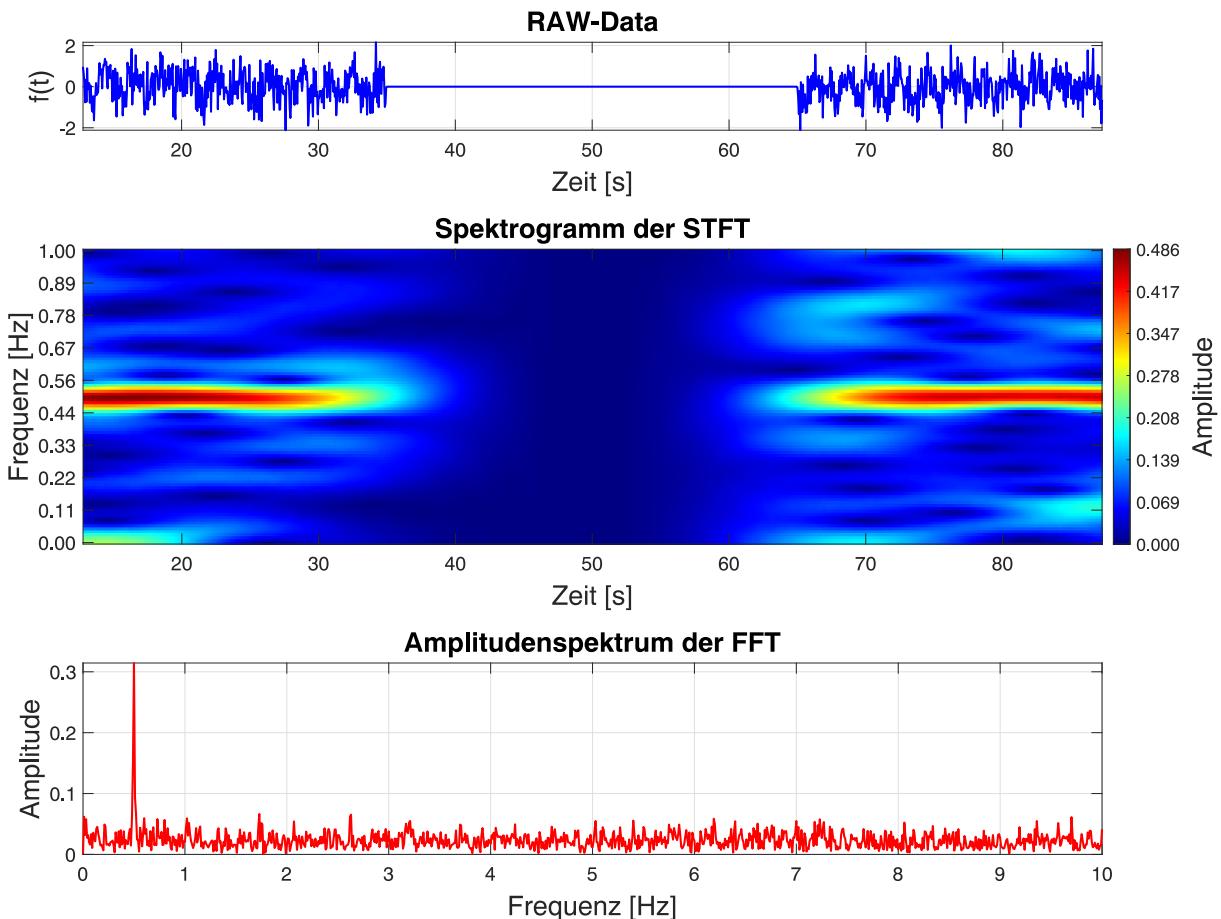


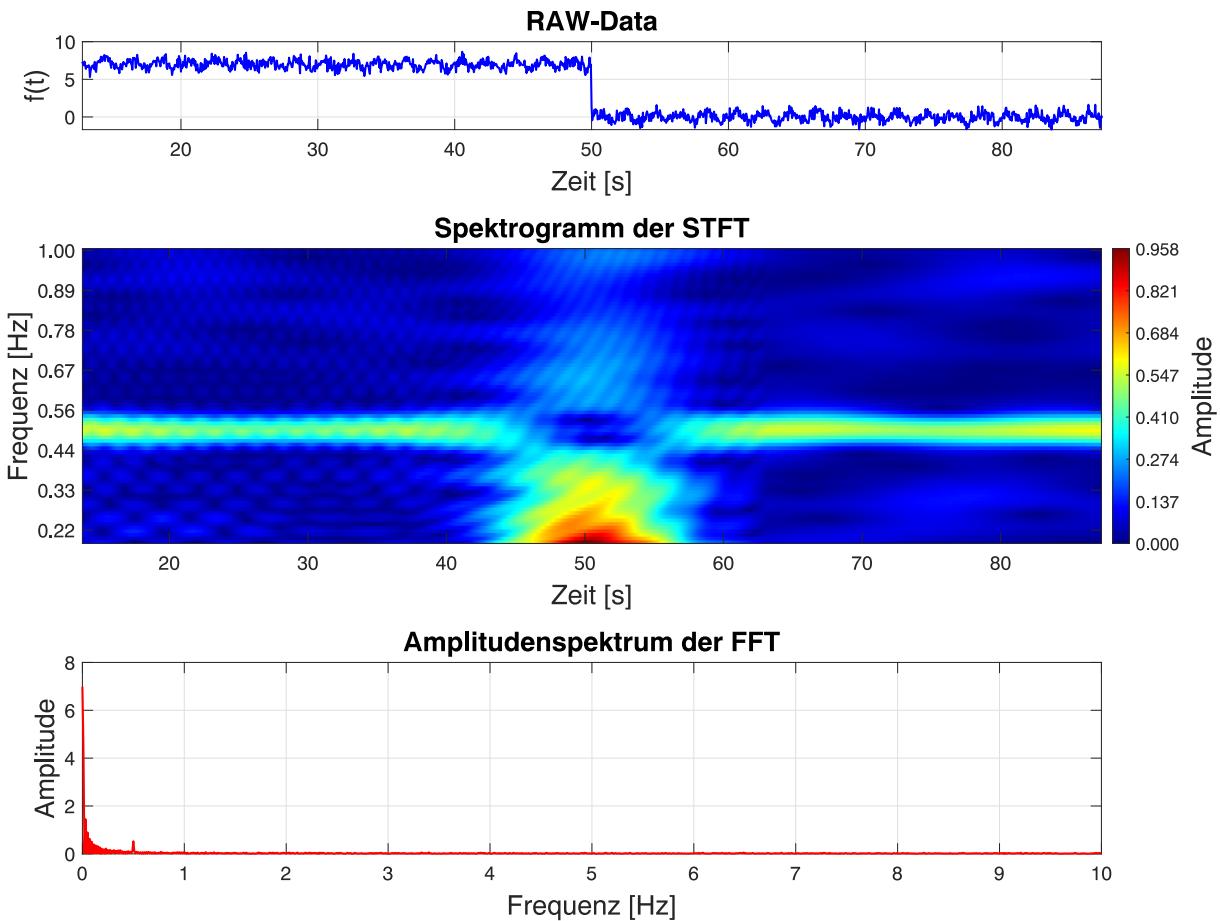
Abbildung 4.11: Simulierte Daten: Spektrogramm, mit normalverteiltem Rauschen, Std.=0,7, Datenlücke von 600 Messwerten

Sowohl die Gabor-Transformation, als auch die FFT sind robust gegenüber der simulierten Datenlücke, wie das Spektrogramm und das Amplitudenspektrum in der Abbildung 4.11 zeigen. Vor und nach der Datenlücke ist das Signal in Hinblick auf Amplitude und Frequenz im Spektrogramm eindeutig zu interpretieren. Auch im Amplitudenspektrum wird

die Frequenz eindeutig ermittelt. Allerdings wird die Amplitude hiermit ca. 0,31 falsch ausgegeben. Hier ist der Vorteil der Gabor-Transformation erneut deutlich erkennbar, im Spektrogramm sind die Amplituden wahrheitsgemäß abzulesen.

#### 4.1.8 Auswertung einer Zeitreihe mit einem Datensprung

Die Testreihe der Gabor-Transformation mit simulierten Datensätzen wird komplettiert durch einen Test mit einem Datensprung, analog zu der Testreihe in [Kapitel 2.4.7](#). Der Datensprung setzt nach der Hälfte der Messzeit ein und senkt den Mittelwert der Zeitreihe um 7 herab (bei einer Amplitude von 0,5). Es folgen die Ergebnisse der Auswertung der datensprungbehafteten Zeitreihe mit der Gabor-Transformation.



*Abbildung 4.12:* Simulierte Daten: Spektrogramm, mit normalverteiltem Rauschen, Std.=0,7, Datensprung bei der Hälfte der Messzeit, Mittelwertänderung von 7

Wiederum wird der Datensprung, ähnlich wie ein Trend, vom Algorithmus als Schwingung mit extrem langer Periode interpretiert, wodurch im Spektrogramm ein Event über den Zeitpunkt des Datensprungs sichtbar wird. Das eigentliche Signal wird zum Teil überdeckt, bleibt aber interpretierbar. Eine Reduktion der beiden Teile der Zeitreihe links und

rechts vom Datensprung um deren individuelle Mittelwerte ist notwendig, damit durch die Gabor-Transformation interpretierbare Ergebnisse erreicht werden können. Um die in [Abbildung 4.12](#) dargestellten Ergebnisse zu erreichen, müssen die ersten Fourier-Koeffizienten vom Plot ausgeschlossen werden, da diese den Mittelwert des ersten Teils der Zeitreihe bis zum Datensprung darstellen und von der Spektralanalyse entsprechend interpretiert werden würden.

## 4.2 Beschreibung der verwendeten Sensorik

In diesem Kapitel sollen die Instrumente beschrieben werden, die zur Erhebung der Zeitreihen verwendet wurden, welche die Datengrundlage für die Auswertung mit der Gabor-Transformation in den folgenden Kapiteln darstellen. Hierbei kommen die gleichen Instrumente sowohl für die Erhebung von Daten unter Labor- und Testbedingungen als auch für die Erhebung der Daten an ausgewählten Überwachungsobjekten zum Einsatz. Neben Standardinstrumentarium in Form von Tachymetern, GNSS-Empfängern und Präzisionsneigungsmessern, welche in der Geodäsie erprobt sind, kommt auch kostengünstige Messtechnik aus dem Consumer-Bereich zum Einsatz. Verwendet wurden in diesem Kontext Beschleunigungsmesser auf MEMS-Basis und kostengünstige GNSS-Empfänger.

### 4.2.1 Leica Nivel210

Beim Nivel210 von Leica Geosystems handelt es sich um einen proprietären, designierten Präzisionsneigungsmesser speziell für das strukturelle Bauwerksmonitoring. Das Instrument wurde von der Firma Kern bereits in den 1980er Jahren entwickelt und nach der Übernahme der Firma durch Leica Geosystems unter dem Namen Nivel210 vertrieben. Das Messprinzip beruht auf einem im Inneren des Nivel210 befindlichen, zum Teil mit Silikonöl gefüllter Zylinder aus Kunststoff, welcher von unten durch den Strahl einer Photodiode beleuchtet wird. Das Licht durchläuft die Flüssigkeit bis zu ihrer Oberfläche und wird an dieser totalreflektiert. Linsen sorgen dafür, dass der Strahl punktförmig auf einer Lateraleffektdiode abgebildet wird. Eine Neigung des Leica Nivel210 aus seiner Nullage bewirkt eine Veränderung des Winkels der Flüssigkeitsoberfläche zum Sensorgehäuse und den Bauteilen und somit eine Ablage des Lichtpunkts auf der Lateraleffektdiode, welche biaxial durch zwei Komponenten erfasst wird. Die Ablage vom Nullpunkt auf der Lateraleffektdiode wird durch trigonometrische Funktionen in eine Neigung umgerechnet. Das Messsystem weist bauartbedingt einen vergleichsweise kleinen Messbereich von  $\pm 100$  mgon beziehungsweise  $\pm 1,51$  mrad auf.

Das Leica Nivel210 stellt ein bewährtes Messsystem für die geodätische Bauwerksüberwachung dar und wurde im Rahmen der Untersuchungen für diese Arbeit zur Erhebung von Zeitreihen verwendet. Das System bietet eine hohe Auflösung und Sensitivität und erreicht eine Genauigkeit von  $\pm 0,0047$  mrad (0,3 mgon). Das Leica Nivel210 liefert, ermittelt aus empirischen Erfahrungsdaten und Voruntersuchungen, eine Messfrequenz von 6 Hz. Das Nivel210 verfügt über eine RS232-Schnittstelle und eine Buchse für die Stromversorgung.

Die technischen Daten des Leica Nivel210 können der nachfolgenden Tabelle entnommen werden.

*Tabelle 4.1: Technische Daten Leica Nivel210 [Leica Geosystems, 2005]*

<b>Sensor:</b>	Leica Geosystems Nivel210
<b>Messbereich:</b>	-1,51 mrad bis +1,51 mrad
<b>Auflösung:</b>	0,001 mrad
<b>Nullpunktstabilität:</b>	0,0047 mrad
<b>Genauigkeit:</b>	± 0,0047 mrad (0,3 mgon)
<b>Spannung:</b>	9–15 V
<b>Leistungsaufnahme:</b>	50 mA
<b>Messfrequenz über Geo- COM:</b>	6 Hz



*Abbildung 4.13: Leica Nivel210*

#### 4.2.2 MEMS-Beschleunigungssensoren

MEMS-Technik (engl. „Micro Electro Mechanical System“) ist aus dem Consumer-Bereich nicht mehr wegzudenken. Der Sammelbegriff beschreibt Systeme mit mechanischen und elektronischen Strukturen, deren Baugröße auf einem Chip oder Substrat im Mikrometerbereich liegt, welche durch Abscheide-, Ätz- und Kappverfahren erreicht wird. Beschleu-

nigungssensoren werden in Verbindung mit Gyroskopen häufig zu sogenannten „Motion-Processing-Units“, kurz MPU, zusammengeschlossen. Der Umstand, dass es sich bei solchen Sensorplattformen aus dem Consumer-Bereich mittlerweile um Multi-Sensor-Systeme handelt, macht diese auch für Aufgaben des ingenieurgeodätischen Monitoring interessant. Die Verwendungszwecke sind nahezu unerschöpflich, die Vorteile des Einsatzes liegen vor allem in den Anschaffungskosten der entsprechenden MEMS-Sensorik. Diese ist aufgrund der Massenproduktion und Skalierbarkeit der Fertigung dem Ultra-Low-Cost Bereich zuzuschreiben. Auch die Kompaktheit hinsichtlich der Größe und des Gewichts sowie der niedrige Stromverbrauch gegenüber herkömmlichen Messinstrumenten sprechen für den Einsatz in der Geodäsie. Die Nutzbarkeit von MEMS-Sensorik aus dem Consumer-Bereich ist inzwischen Gegenstand intensiver Forschung auf dem Gebiet der Geodäsie beziehungsweise des ingenieurgeodätischen Monitoring, Interessierte können auf eine Vielzahl an Veröffentlichungen auf diesem Gebiet zurückgreifen.

Beschleunigungssensoren auf MEMS-Basis sind Inertialsensoren (lat. „inertia“, „Trägheit“). Sie detektieren ein Bewegungsverhalten in Bezug zum gravitationsfreien, unbeschleunigten Inertialraum. Ein Beschleunigungsmesser stellt eine gefedert frei gehängte Prüfmasse dar, welche aufgrund der Trägheit bei wirkender Beschleunigung ausgelenkt wird. Das Maß der Auslenkung ist ein Maß für die kinematische Beschleunigung. Um einen Abgriff elektronisch zu realisieren, wird die Prüfmasse zwischen zwei Kondensatorplatten verbaut. Bei Auslenkung wird die ungleiche Kapazität der Kondensatoren erfasst und in eine Beschleunigung umgewandelt. Folgende Abbildungen zeigen das Funktionsprinzip von Beschleunigungsmessern auf MEMS-Basis.

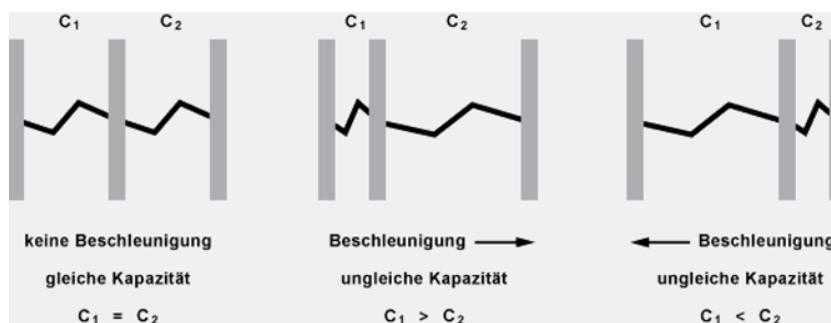


Abbildung 4.14: Funktionsprinzip kapazitiver Abgriff eines Beschleunigungsmessers auf MEMS-Basis [Elektronik-Kompendium, 2025]

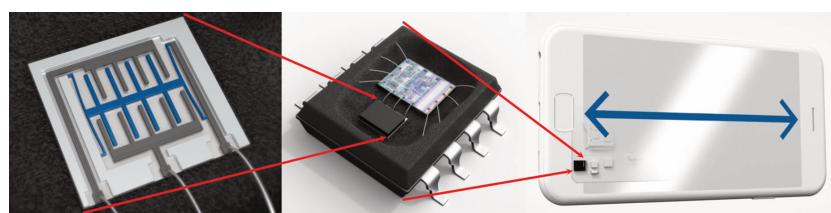


Abbildung 4.15: Ansicht auf die Messeinheit einer Achse eines MEMS-Beschleunigungsmessers (links), integriert auf einem Chip (Mitte), verbaut in einem Smartphone (rechts) – Abgewandelte Darstellungen aus einem Video zum Funktionsprinzip eines MEMS-Beschleunigungssensors [Bosch Mobility Solutions, 2025]

Zur Steigerung der Genauigkeit wird bei MEMS-Beschleunigungssensoren der Abgriff an einer Vielzahl von Stellen durch ineinandergreifende Kammstrukturen realisiert. Bei wirkender Beschleunigung ändern sich die Abstände in den Kammstrukturen, wodurch Kapazitätsänderungen entstehen, welche in Beschleunigungen umgewandelt werden. Im Kontext der geodätischen Bauwerksüberwachung sind Beschleunigungsmesser prädestiniert für die Schwingungsmessung beziehungsweise für die Detektion hochfrequenter Schwingungen. Das Einbeziehen von Beschleunigungsdaten in der Schwingungsanalyse ermöglicht einen Rückschluss auf ein metrisches Bewegungsverhalten des zu überwachten Messobjekts. Grundlage hierfür ist die zweifache Integration der Beschleunigungen nach der Zeit, wodurch der Weg als Größe entwickelt wird. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurden zum Teil in Smartphones verbaute Beschleunigungsmesser für die Schwingungsanalyse verwendet, deren erhobene Daten sowohl in Laboruntersuchungen als auch an Realobjekten einer Analyse mit der Gabor-Transformation unterzogen wurden. Für die Aufzeichnung der Beschleunigungsdaten der Smartphones wurde die freie und quelloffene Applikation „Phyphox“ verwendet, bei der es sich um eine Entwicklung der RWTH Aachen handelt [RWTH Aachen University, 2025].

### 4.2.3 GNSS-Sensoren

Für die messtechnischen Arbeiten dieser Masterthesis wurden sowohl GNSS-Empfänger aus dem geodätischen Präzisionsbereich von der renommierten Marke Leica verwendet, als auch solche, die dem kostengünstigen und Consumer-Bereich zuzuordnen sind. Da es sich bei den Systemen von Leica um erprobtes Instrumentarium handelt, welches von einer breiten Masse im täglichen Gebrauch verwendet wird, soll sich die Vorstellung der verwendeten Systeme hauptsächlich auf die kostengünstigen Empfänger konzentrieren.

Zum Einsatz kommen kostengünstige GNSS-Empfängermodule vom Typ ZED-F9P des Schweizer Herstellers u-blox, der sich auf die Entwicklung von Kommunikations- und Positionierungstechnologien in den Bereichen Mobilfunk, Bluetooth, Wi-Fi und GNSS spezialisiert hat. Die Produkte des Unternehmens finden durch Weiterverarbeitung breite Anwendung in industriellen Umgebungen, im Automobilsektor sowie in weiteren technischen Feldern. Seit Ende 2018 sind neben klassischen Einfrequenzempfängern auch GNSS-Mehrfrequenzmodule mit integriertem RTK-Modus zu günstigen Konditionen verfügbar. Die kürzlich veröffentlichte X20-Plattform von u-blox [u-blox AG, 2024] stellt eine Weiterentwicklung dar und unterstützt die Signalverarbeitung aller gängigen GNSS-Systeme und Frequenzbänder sowie eine verbesserte Eignung für PPP-basierte Verfahren. Besonders hervorzuheben ist die Möglichkeit zur Ausgabe von Rohdatenströmen über vielfältige Schnittstellen, was in der Bauwerksüberwachung von besonderem Interesse ist. Dort werden unprozessierte GNSS-Daten oft im Verbund mit weiteren Sensorkomponenten verwendet, etwa zur gemeinsamen Auswertung im Rahmen ausgleichungstheoretischer Verfahren oder spektralanalytischer Ansätze. Der in dieser Masterarbeit eingesetzte Empfängerchip vom Typ ZED-F9P [u-blox AG, 2025] ist auf dem Entwicklerboard simpleRTK2B Pro des Unternehmens ArduSimple integriert [ArduSimple, 2025] und wird für unter 200€

angeboten. Dieser Preis positioniert das Modul als kostengünstige Alternative zu professionellen geodätischen GNSS-Empfängern, die typischerweise im vier- bis fünfstelligen Eurobereich liegen. Auch bei der Wahl geeigneter Antennen sind insbesondere im Bereich der relativen Positionierungsanwendungen ökonomisch sinnvolle Lösungen möglich. Die spezifischen Leistungsmerkmale des Moduls auf Basis des ZED-F9P im Zusammenspiel mit dem simpleRTK2B Pro Board sind in der nachfolgenden Tabelle dargestellt.

*Tabelle 4.2: Technische Daten u-blox ZED-F9P-04B [u-blox AG, 2025]*

<b>Empfangskanäle:</b>	184
<b>Unterstützte Systeme/ Frequenzen:</b>	GPS: L1 C/A, L2C; GLONASS: L1OF, L2OF; Galileo: E1-B/C, E5b; Beidou: B1I, B2I
<b>Rohdatenausgabe:</b>	Code-, Phasenmessung, Doppler Ausgaberate: 15–25 Hz
<b>Protokolle:</b>	NMEA, UBX binary, RTCM v.3.3, SPARTN v.2.0
<b>Schnittstellen:</b>	2 × UART, 1 × USB, 1 × SPI, 1 × I <sup>2</sup> C



*Abbildung 4.16: u-blox ZED-F9P-04B*

Zur Auswertung der aufgenommenen GNSS-Rohdaten kommt das Softwaremodul RTK-Post aus der Open-Source-Softwarebibliothek RTKLIB zum Einsatz [RTKLIB, 2025]. Diese von Tomoji Takasu seit 2006 entwickelte Umgebung stellt eine leistungsfähige Plattform zur Erfassung, Verarbeitung und Analyse von GNSS-Daten im Postprocessing wie auch im Echtzeitbetrieb dar. Die Software unterstützt eine Vielzahl an Formaten und Kommunikationsschnittstellen und bietet umfassende Konvertierungs- und Auswertefunktionen. Aufgrund des offenen Quellcodes wurde die RTKLIB Programmbibliothek in der Nutzergemeinschaft breit adaptiert, erweitert und für unterschiedliche Anforderungen modifiziert. Eine praxisrelevante Variante stellt die durch den US-amerikanischen Entwickler Tim Everett angepasste Version demo5 b35k dar, welche gezielt für den Einsatz mit kostengünstigen Mehrfrequenzempfängern optimiert wurde und auch in der vorliegenden Arbeit Anwendung findet. Für weiterführende Informationen sei an dieser Stelle auf die durch Everett betreute Website verwiesen [Everett, 2024], welche detaillierte Hinweise zur Nutzung und Konfiguration der modifizierten RTKLIB-Version enthält.

Für die Datenerhebung der Zeitreihen an den realen Überwachungsobjekten sind in früheren Messeepochen Leica GMX902 GG Empfänger in Verbindung mit Antennen aus dem geodätischen Präzisionsbereich verwendet worden. Der Leica GMX902 GG ist ein designierter GNSS-Präzisions-Empfänger, der speziell für den Einsatz in Bauwerksüberwachungen entwickelt worden ist. Als geeignete Überwachungsobjekte nennt Leica beispielsweise Brücken und Dämme oder natürliche Überwachungsobjekte wie Hangrutschungen oder Vulkane. Die wesentliche Funktion des Empfängers, die Erfassung von Rohdaten mit einer Rate von bis zu 20 Hz, lässt jedoch eine Vielzahl an weiteren, denkbaren Einsatzmöglichkeiten zu. Bei Verwendung des Leica GMX902 GG muss zur Erfassung der Rohdaten die von Leica bereitgestellte Software GNSS SPIDER zwingend verwendet werden, Rohdaten können nur im binären, Leica proprietären Format LB2 erfasst werden. Mit der Ergänzung der automatisierten Deformationsanalyse durch die Software LEICA GEOMOS oder LEICA SPIDERQC kann eine integrierte Lösung zur automatisierten Bauwerksüberwachung aufgebaut werden. Bereits 2010 entwickelt, stellt die Hardware und Software allerdings eine veraltete Lösung dar, es gibt inzwischen modernere Systeme auf dem Markt, die erweiterte Funktionen bieten; für den Inhalt dieser Arbeit und die Anforderungen der Überwachungsobjekte ist die Technik ausreichend [Leica Geosystems AG, 2010]. Die technischen Daten des Leica GMX902 GG sind der nachfolgenden Tabelle zu entnehmen.

Tabelle 4.3: Technische Daten Leica GMX902 GG [Leica Geosystems AG, 2010]

<b>Empfangskanäle:</b>	72
<b>Unterstützte Systeme/ Frequenzen:</b>	GPS: L1, L2 GLONASS: L1, L2
<b>Rohdatenausgabe:</b>	Code-, Phasenmessung, Doppler Ausgaberate: 20 Hz
<b>Protokolle:</b>	Leica LB2
<b>Schnittstellen:</b>	Seriell RS232 über LEMO-1 8-pin, TNC, LEMO-y, LEMO HGP.0S.250.CTL



Abbildung 4.17: Leica GMX902 GG, geodätischer GNSS-Empfänger für Bauwerksüberwachungen

#### 4.2.4 Tachymeter

Für die Datenerhebung und die messtechnische Untersuchung in dieser Arbeit wurde eine Reihe von Tachymetern von Leica Geosystems verwendet. Da dem breiten Fachpublikum die Eigenschaften und die Funktionen von Tachymetern grundsätzlich bekannt sind, soll auf die Standardfunktionen und Beschreibungen an dieser Stelle verzichtet werden. Jedoch wurden die Instrumente zum Teil in unkonventioneller Weise als Neigungssensoren eingesetzt, um Bauwerksschwingungen durch Auswertung mit Werkzeugen der Zeitreihenanalyse zu detektieren. Grundlage dafür ist die in der Arbeit [Vollert, 2022] entwickelte These, dass die Neigungssensoren, welche in Tachymetern die Restneigung der Stehachse

kompensieren, hinsichtlich der Bauart, der Wirkungsweise und der Genauigkeit den flüssigkeitsbasierten Nivel210 von Leica gleichen. Diese These konnte in [Vollert, 2022] durch die dort ermittelten Ergebnisse in großen Teilen bestätigt werden. Die Möglichkeit, interne Rohdaten wie die Neigungswerte des Zweiachsneigungsmessers in den Leica Tachymetern abzurufen, wird nicht von Haus aus als Programm auf dem Interface des Instruments bereitgestellt. Hierfür muss auf das von Leica bereitgestellte Kommunikationsprotokoll GeoCOM zurückgegriffen werden, welches zur Erstellung komplexer Messprogramme und der unkonventionellen Ansteuerung von Leica Tachymetern entwickelt wurde. Über eine serielle Schnittstelle kann das Instrument mit einer ASCII-Befehlskette angesprochen werden, als Antwort liefert das Instrument dann den angeforderten Messdatensatz oder führt die gewünschte Aktion, wie zum Beispiel das Abdrehen von festen Richtungen und das anschließende Auslösen einer Messung aus. Die verschiedenen Kommunikationsparameter sowie ASCII-Befehle sind in [Leica Geosystems, 2004] und Folgeversionen des Dokuments einzusehen. Für die messtechnischen Untersuchungen in [Vollert, 2022] wurde der GeoCOM-Befehl für einen vollständigen Datensatz verwendet, der die Beobachtung der Kompensatormesswerte einschließt. Dieser wurde durch ein Python-Skript über die serielle Schnittstelle zum Instrument geschickt, die Antwort empfangen, abgelegt und über eine Schleife die nächste Messaufforderung gesendet. Dieser Prozess wird mit einer Frequenz von 20 Hz wiederholt. Es folgen die technischen Daten eines beispielhaften Leica Tachymeter, welches für die Untersuchungen häufig verwendet wurde.

*Tabelle 4.4:* Technische Daten Leica TM30 [Leica Geosystems, 2009]

<b>Sensor:</b>	Leica Geosystems TM30
<b>Genauigkeit Hz, V:</b>	0,5" (0,15 mgon), 1" (0,3 mgon)
<b>ATR-Winkelgenauigkeit:</b>	1" (0,3 mgon)
<b>Kompensator</b> <b>Einspielbereich:</b>	4' (0,07 gon)
<b>Einspielgenauigkeit:</b>	0,5" (0,15 mgon)
<b>Genauigkeit Strecke (Prisma):</b>	Precise-Mode: 0,6 mm + 1 ppm
<b>Genauigkeit Strecke (RL):</b>	Standard Modus: 2 mm + 2 ppm
<b>Maximale Reichweite EDM:</b>	5400 m (Standard Modus)
	12000 m (Long Range Modus)
<b>Messfrequenz über GeoCOM:</b>	20 Hz

Folgende Abbildung zeigt das verwendete Leica TM30 Tachymeter.



Abbildung 4.18: Leica TM30, Präzisionstachymeter, speziell für Anwendungen in der Bauwerksüberwachung

### 4.3 Auswertung von Labordaten

Um die Robustheit der Gabor-Transformation auf Zeitreihen, welche unter realen Bedingungen, wie realem Messrauschen erfasst wurden, ist an der Hochschule Neubrandenburg ein Versuchsaufbau zur Erzeugung von periodischen Schwingungsvorgängen unter realen Bedingungen entwickelt worden. Mit dieser Laborkonfiguration soll sichergestellt werden, dass die Gabor-Transformation unter alltäglichen Messbedingungen fähig ist, hochfrequente Schwingungsvorgänge mit kleiner Amplitude ( $\sim 1\text{mm}$ ) aufzudecken. Im Rahmen der Untersuchungen wurden auf dem Schwingungserzeuger Zeitreihen mit einem kostengünstigen GNSS-Empfänger erfasst und mit einem Smartphone Beschleunigungsdaten aufgenommen. Beide Datensätze wurden im Anschluss mit der Gabor-Transformation ausgewertet.

Der Versuchsaufbau besteht aus einem Schwingungserzeuger, der englischen Firma LING DYNAMIC SYSTEMS, welcher inzwischen nicht mehr hergestellt wird. Betrieben über ein Labornetzteil, kann der Schwingungserzeuger Schwingungen mit veränderlichem Hub

(Amplitude) und Frequenz generieren. Einstellbar ist dies über elektrische Parameter am Labornetzteil, zu sehen auf nachfolgender Abbildung.



Abbildung 4.19: Labornetzteil der Firma LING DYNAMIC SYSTEMS mit einstellbarem Gain, Frequency und Frequency Range

Der Schwingungserzeuger ist um eine die X-Achse drehbar. Um für GNSS-Messungen nicht nur Bewegungen in Z-Achse simulieren zu können, sondern auch in X- und Y-Achse wurde ein Adapter im 3D-Druckverfahren von Herrn B. Eng. NICK KIRSCHKE hergestellt, dem an dieser Stelle Dank gebührt. Veranschaulicht ist der Messaufbau mit Schwingungserzeuger und GNSS-Antenne auf nachfolgender Abbildung.



Abbildung 4.20: Messaufbau Schwingungserzeuger mit Low-Cost-GNSS-System als Sensor

Für den Messaufbau mit einem SM-S916B/DS (Galaxy S23+) Smartphone der Marke Samsung als Sensor zur Erfassung von Beschleunigungsdaten wurde eine Smartphone-Halterung der Marke QUADLOCK aus dem Outdoor-Bereich verwendet. Der Aufbau ist in der nachfolgenden Abbildung veranschaulicht.



Abbildung 4.21: Messaufbau Schwingungserzeuger mit Smartphone-Halterung zur Beschleunigungsmessung

#### 4.3.1 Auswertung von Labordaten: Low-Cost-GNSS

Bei der Erzeugung von Labordaten unter realen Bedingungen wurde auf dem Dach der Hochschule Neubrandenburg ein Testaufbau mit kostengünstigen GNSS-Empfängern entwickelt. Gemessen wurde in einer differentiellen Konfiguration mit eigener Basis. Sowohl für den Rover, der in Kombination von Empfänger und Antenne die Deformationen durch den Schwingungserzeuger aufgenommen hat, als auch für die feste Basis kamen u-blox ZED-F9P-04B zum Einsatz. Die Empfänger sind in [Kapitel 4.2.3](#) beschrieben. Die Empfänger werden in RTKNAVI verbunden und konfiguriert, sodass die Datenströme in diesem Modul aus der RTKLIB Programmbibliothek zusammengeführt und gespeichert werden. Die so erhobenen Daten werden im Anschluss in RTKCONV vom u-blox proprietären Format .ubx nach RINEX konvertiert, um die Daten für eine Weiterverarbeitung vorzubereiten. Die eigentliche Basislinienberechnung, aus der die durch die Deformation hervorgerufenen Positionsunterschiede abgeleitet werden, erfolgt in RTKPOST im Postprocessing. Aus der Tatsache eines zu überwachenden, kinematischen Vorgangs, der nicht in Echtzeit erfasst und berechnet, sondern im Postprocessing verarbeitet wird, leitet sich die im weiteren Verlauf verwendete Bezeichnung „*Postprocessing kinematisch*“ („PPK“) ab.

Folgende Abbildung zeigt den Messaufbau auf dem Messdach der Hochschule Neubrandenburg mit Notebook als Datenlogger, zwei u-blox ZED-F9P-04B Empfängern, dem Schwingungserzeuger mit Netzteil, der Basisantenne auf einem Messspfeiler und der Roverantenne auf dem 3D-gedruckten Adapterteil am Schwingungserzeuger.

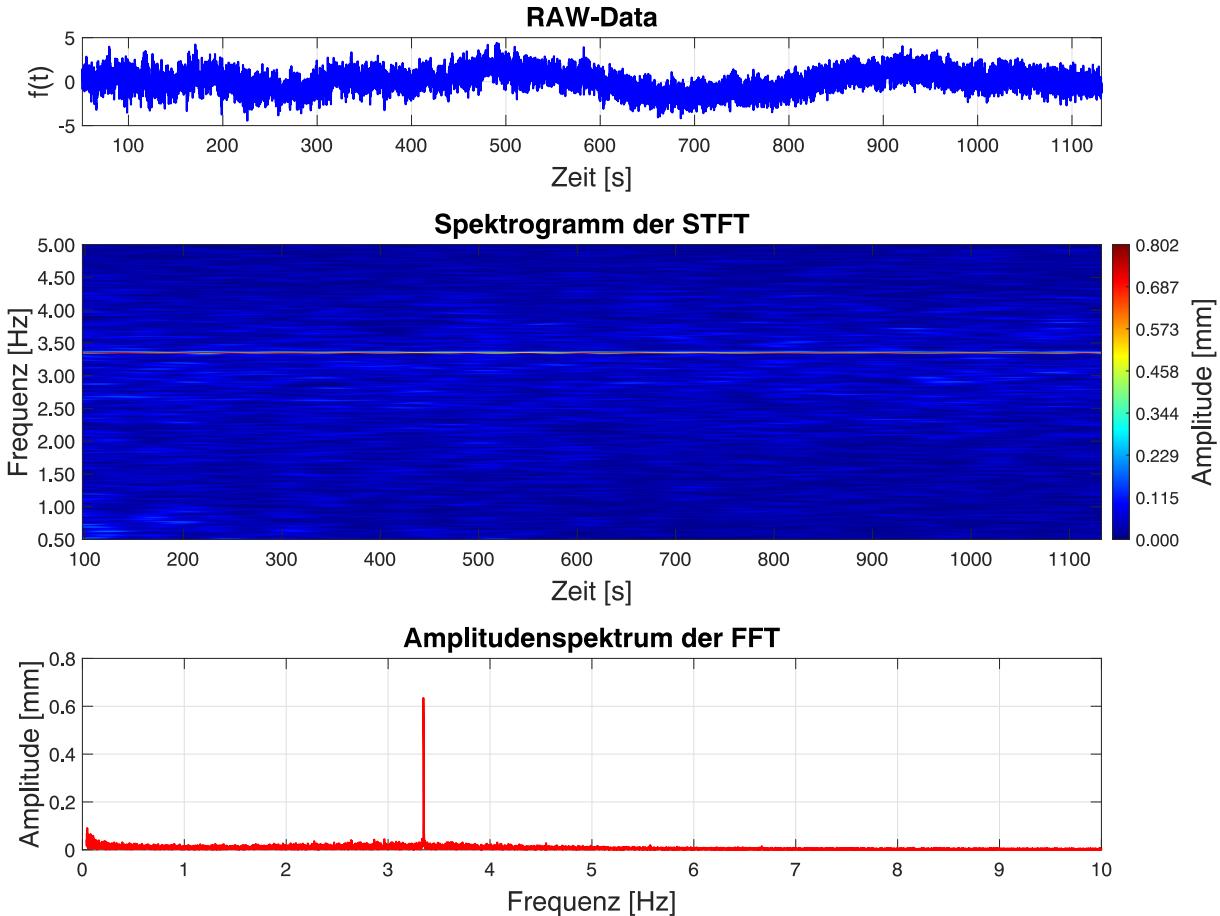


Abbildung 4.22: Messaufbau Laboruntersuchungen Low-Cost-GNSS auf dem Dach der Hochschule Neubrandenburg

Die detaillierten Schritte der Datenerfassung, Datenprozessierung, Datenkonvertierung und Basislinienberechnung sollen an dieser Stelle nicht weiter behandelt werden, obgleich diese Schritte ein hohes Maß an Komplexität und Aufwand mit sich bringen. Der Fokus hier soll primär auf der Auswertung der fertigen, bereinigten Zeitreihe mit Hilfe der Gabor-Transformation liegen.

Für die Testreihen mit den Low-Cost-GNSS-Empfängern wurde der Schwingungserzeuger auf eine feste Frequenz und einen festen Hub (Amplitude) gestellt, die Datenaufnahmen gestartet und eine lange Zeitreihe von rund 50 - 60 min ohne Veränderung von Amplitude und Frequenz am Schwingungserzeuger aufgenommen. Erhoben wurden zwei Zeitreihen, mit Hub des Schwingungserzeugers in X/Y-Richtung mit Adapterteil und mit Hub des Schwingungserzeugers in Z-Richtung. Dadurch konnten beide Richtungskomponenten des GNSS-Empfängers getestet werden.

Es folgen die Ergebnisse der Zeitreihenanalyse der Labormessung mit kostengünstigen GNSS-Empfängern und Auswertung mit der Gabor-Transformation im gewohnten Format zunächst für die Konfiguration in X/Y-Richtung.



*Abbildung 4.23:* Labordaten: Zeitreihe von kostengünstigen GNSS-Empfängern auf Schwingungserzeuger, Eigene Basis, Postprocessing, Konfiguration mit Bewegung in X/Y-Richtung

Im Spektrum ist ein deutliches Event im Vergleich zum Grundrauschen sichtbar. Vorab ist wichtig zu erwähnen, dass die Zeitreihe vorab bearbeitet werden musste, damit gute Ergebnisse erzielt werden konnten. Die durch GNSS-Empfänger erfasste Zeitreihe war mit einigen Artefakten wie Trendscheinungen und Datensprüngen behaftet, die vorab eliminiert werden mussten. Gründe hierfür liegen in den Eigenschaften von GNSS. Während dem ersten Teil der Messung hat das System einige Zeit gebraucht um die Mehrdeutigkeiten zu lösen. Aus diesem Grund wurde für die Zeitreihenanalyse der erste Teil der Zeitreihe weggescchnitten. Während der Messung kam es zudem zu einigen Verlusten der Mehrdeutigkeitslösung, was starke Datensprünge verursacht hat. Auch nach Bereinigung und Einkürzung der Gesamtlänge der Zeitreihe sind im Spektrum hohe Energien im niedrfrequenten Bereich sichtbar. Dennoch sind alle relevanten Informationen mit hoher Qualität im Spektrogramm ablesbar. Zeit, Frequenz und Amplitude sind eindeutig quan-

tifizierbar. Zur anschaulichereren Darstellung folgt ein Plot mit einer angepassten Zoomstufe auf den gleichen Datenbestand.

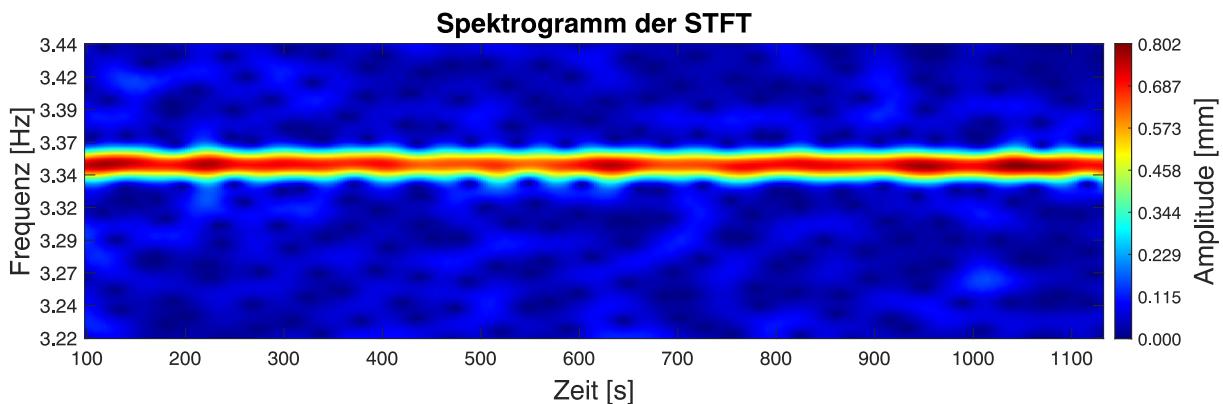
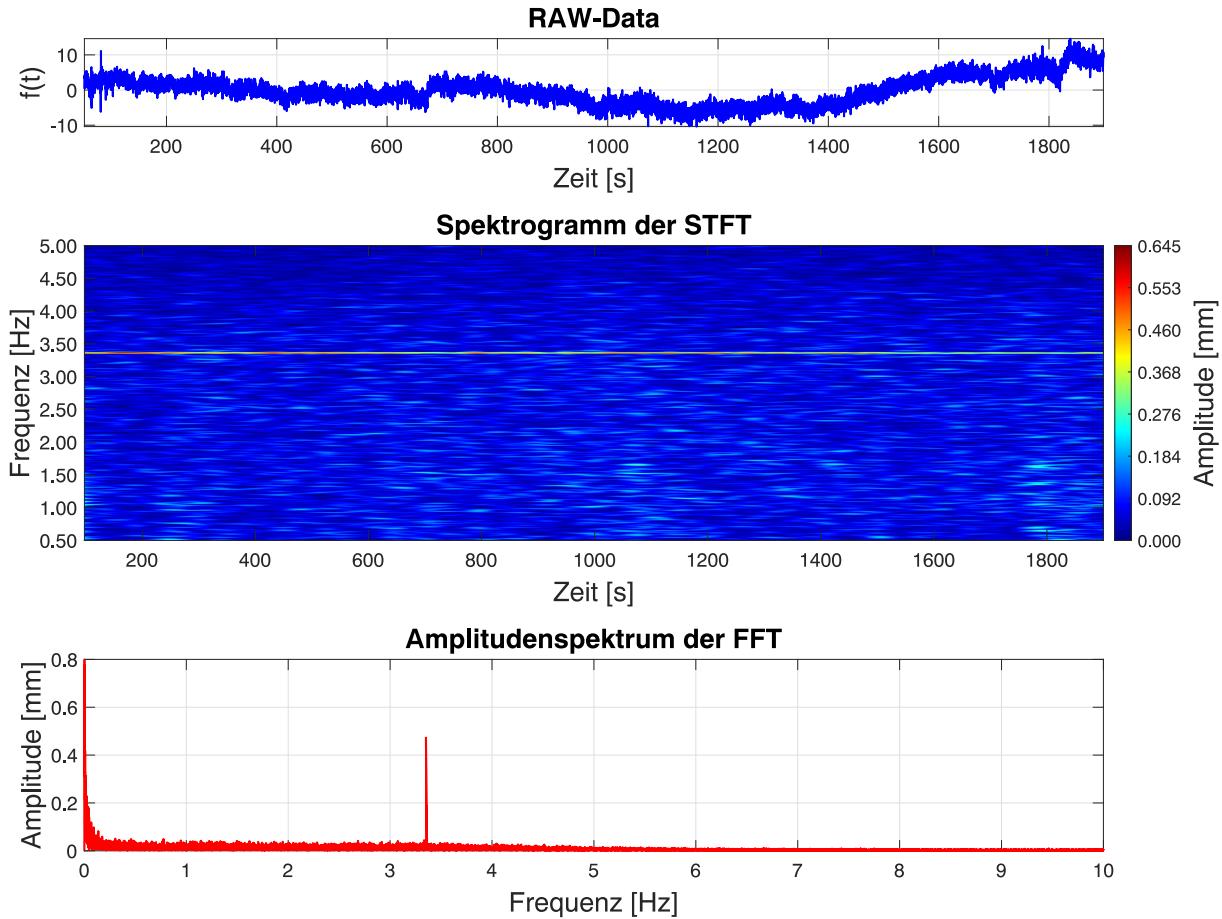


Abbildung 4.24: Labordaten: Zeitreihe von kostengünstigen GNSS-Empfängern auf Schwingungserzeuger, Eigene Basis, Postprocessing, Konfiguration mit Bewegung in X/Y-Richtung

Die Frequenzauflösung ist hierbei sehr hoch, die Frequenz kann hoch genau quantifiziert werden. Auch ist erkennbar, dass die Schwingung, welche durch den Schwingungserzeuger generiert wird, über den zeitlichen Verlauf frequenzstabil bleibt.

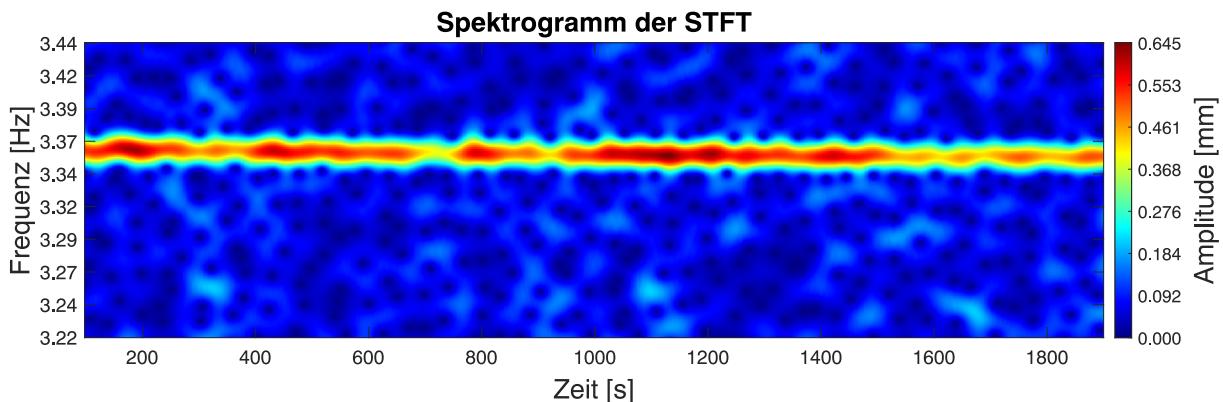
Es folgen die Ergebnisse der Auswertung der Labormessung mit kostengünstigen GNSS-Empfängern, eigener Basis, Postprocessing in Konfiguration mit Bewegung in Z-Richtung durch die Gabor-Transformation.



*Abbildung 4.25:* Labordaten: Zeitreihe von kostengünstigen GNSS-Empfängern auf Schwingungs erzeuger, Eigene Basis, Postprocessing, Konfiguration mit Bewegung in Z-Richtung

Sofort fällt das höhere Rauschniveau dieser Konfiguration gegenüber der Konfiguration mit Bewegung in X/Y-Richtung auf. Die Zeitreihe wies ähnliche Artefakte wie die vorherige auf, es war eine ähnliche Datenbereinigung notwendig. Ansonsten sind die Ergebnisse ähnlich, eine Ergebnisinterpretation und Quantifizierung der Kenngrößen ist zweifelsfrei und eindeutig möglich.

Zur Steigerung der Anschaulichkeit folgt wiederum ein Spektrogramm der selben Auswertung mit einer höheren Zoomstufe.



*Abbildung 4.26:* Labordaten: Zeitreihe von kostengünstigen GNSS-Empfängern auf Schwingungsgeber, Eigene Basis, Postprocessing, Konfiguration mit Bewegung in Z-Richtung

Im gezoomten Ausschnitt des Spektrogramms wird das höhere Rauschniveau nochmals deutlich. Das Event gestaltet sich im Vergleich mit der vorherigen Konfiguration noch etwas unruhiger, ausgefranster und verrauschter. Trotzdem ist das Ablesen und Quantifizieren der Ergebnisse problemfrei möglich.

Zusammengefasst kann gesagt werden, dass die Gabor-Transformation zur Detektion von Schwingungen im Frequenzbereich von ca. 3 Hz und einer Amplitude von ca. 0,8 mm, in Kombination mit kostengünstigen GNSS-Sensoren, geeignet ist. Unter realen Messbedingungen hinsichtlich Rauscheinflüssen, Verschattungen, Mehrwegeeffekten und Initialisierungseinflüssen konnten mit diesem System plausible und interpretierbare Ergebnisse durch Analyse mit der Gabor-Transformation erreicht werden. Besonders bemerkenswert auf Sensorseite ist der Umstand, dass das kostengünstige GNSS-Messsystem tauglich ist, um im Kontext von Relativmessungen Bewegungen im Sub-Millimeterbereich signifikant aufzudecken. Die Signifikanz ist deutlich aus dem Verhältnis der Überhöhung des Events aus dem Grundrauschen gegeben. Eine Validierung des Messmittels durch eine höherwertige Referenz wie einen Lasertracker ist nicht erfolgt. Jedoch wird das kostengünstige GNSS-Messsystem durch die Tatsache validiert, dass es an den Überwachungsobjekten im Vergleich zu vorherigen Messungen gleichwertige Ergebnisse liefert, wie bereits erprobte Messmittel. Dieser Umstand wird an geeigneter Stelle in [Kapitel 4.4](#) aufgegriffen.

### 4.3.2 Auswertung von Labordaten: Beschleunigungsdaten Smartphone auf MEMS-Basis

Es folgt die Erfassung von Beschleunigungsdaten, aufgenommen mit einem Smartphone, auf dem Schwingungserzeuger, mit anschließender Analyse durch die Gabor-Transformation. Es wurden zwei Zeitreihen über einige Minuten erfasst. Für die Zeitreihen wurden die Frequenzen des Schwingungserzeugers durchgeschaltet. Die erste Zeitreihe wurde mit einer Frequenz des Schwingungserzeugers von 3 Hz gestartet. Nach einiger Zeit wurde die Frequenz auf 5 Hz erhöht. Dann auf 10 Hz, nach einiger Zeit wurde auf 5 Hz zurückgeschaltet, dann auf die Ausgangsfrequenz von 3 Hz. Im Anschluss wurde die Range am Netzteil erhöht, von 3 Hz wurde auf 10 Hz geschaltet, dann auf 30 Hz, auf 100 Hz und zum Schluss in umgekehrter Reihenfolge zurück. Die Daten wurden wie beschrieben mit der Smartphone-Applikation PHYPHOX auf dem Samsung SM-S916B/DS (Galaxy S23+) erfasst und im Anschluss in MATLAB ausgewertet. Es folgt die Auswertung mit der Gabor- und der Fast-Fourier-Transformation in gewohnter, dreigeteilter Ansicht.

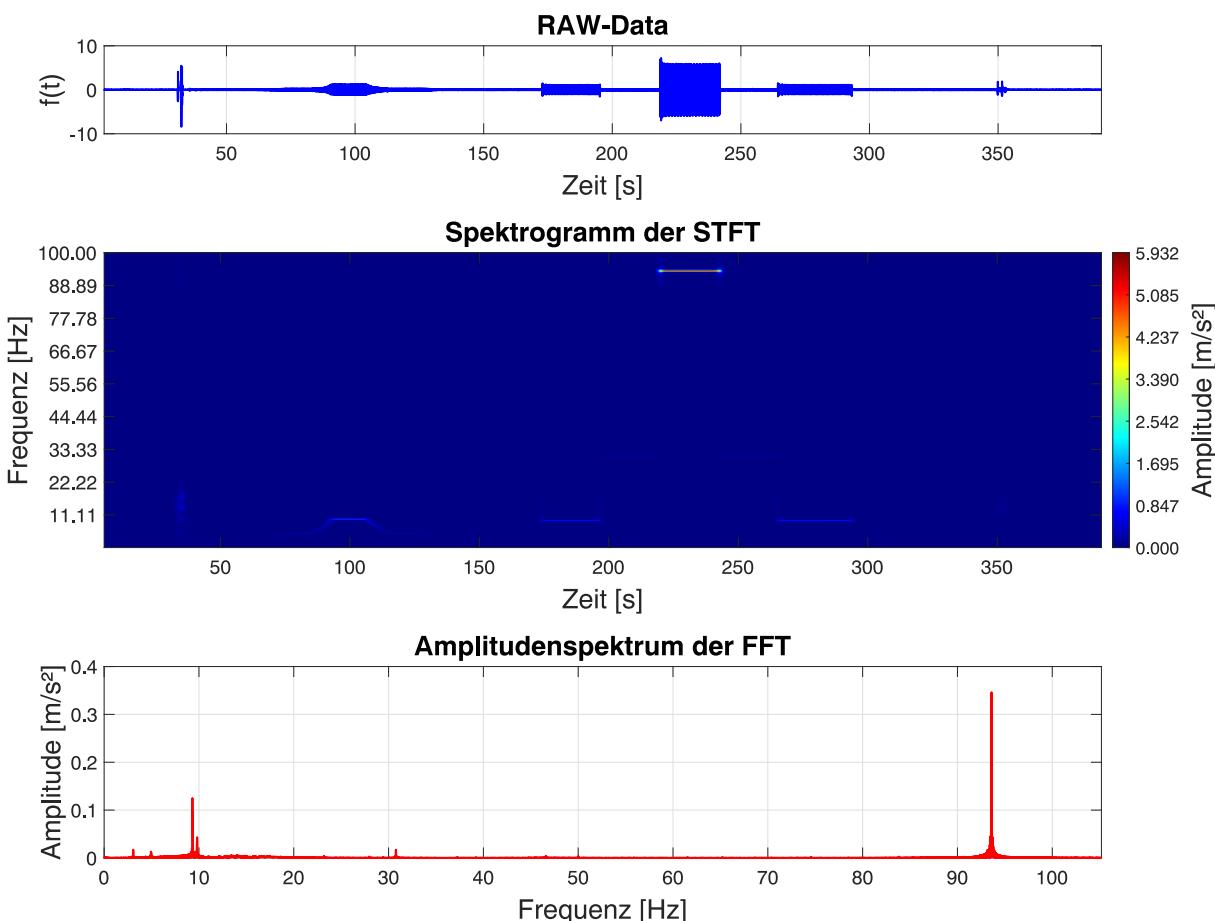


Abbildung 4.27: Labordaten: Erste Zeitreihe von Beschleunigungsdaten auf Schwingungserzeuger, aufgenommen durch ein Samsung SM-S916B/DS (Galaxy S23+), Darstellung kompletter Frequenzbereich

Bei Anschauung der Abbildung 4.27 wird eine Schwäche im Zusammenhang mit der Darstellung im Spektrogramm deutlich. Wenn die im Signal enthaltenen Frequenzen zu weit auseinander liegen, haben die hohen Frequenzen einen deutlich höheren Energiegehalt (Amplituden), die Amplituden der niedrigen Frequenzen sind durch die Darstellung überdeckt und kaum noch sichtbar. Grund dafür liegt in der Schwingungsgleichung für die momentane Auslenkung einer harmonischen Schwingung:

$$A_t = y_n = A_B \cdot \sin(2\pi ft + \varphi_0) \quad (4.1)$$

Die Rekonstruktion einer Schwingung erfolgt über die Messungen der momentanen Auslenkung  $A_t$  oder  $y_n$ , welche abhängig von der Zeit  $t$  und der Berechnung der drei unbekannten Größen des Anfangsphasenwinkels  $\varphi_0$ , der Frequenz  $f$  und der Signalamplitude  $A_B$  ist. Aus der Formel wird deutlich, dass die gemessene Auslenkung bei gleichbleibender Amplitude  $A_B$  steigt, wenn die Frequenz  $f$  größer wird. Aus diesem Grund haben in Bezug auf die vorherige Auswertung der Beschleunigungsdaten und grundlegend aller Daten die Events mit höherer Frequenz eine höhere Energie. Abhilfe in Bezug auf die Darstellung kann hier eine logarithmische Skalierung der Farbzuweisung der Amplituden schaffen. Hierfür wurden die Koeffizienten mit einem dekadischen Logarithmus multipliziert. Zur Trennung der Darstellung wurde eine andere Farbdarstellung bzw. Colormap verwendet. Die folgende Abbildung zeigt die Auswertung derselben Zeitreihe wie Abbildung 4.27, nur in logarithmischer Darstellung.

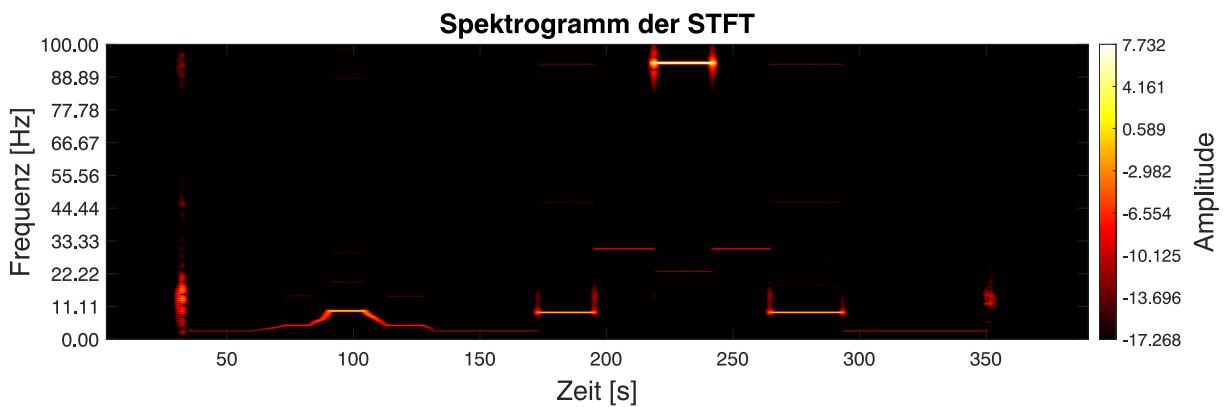


Abbildung 4.28: Labordaten: Erste Zeitreihe von Beschleunigungsdaten auf Schwingungserzeuger, aufgenommen durch ein Samsung SM-S916B/DS (Galaxy S23+), Darstellung kompletter Frequenzbereich, logarithmisch skaliert

Die Abbildung 4.28 zeigt die Auswertung derselben Zeitreihe wie Abbildung 4.27, nur in logarithmischer Darstellung. Durch diese Abhilfe und Modifikation der Darstellung können bereits mehr Informationen aus dem Spektrogramm gewonnen werden. Ein Quantifizieren der Amplituden ist bei dieser Skala jedoch nicht einfach möglich, die Skala müsste entsprechend logarithmisch zurückgerechnet beziehungsweise umgewandelt werden. Darauf

wird an dieser Stelle verzichtet. Die Quantifizierung der Amplituden wird durch Auswahl verschiedener Ausschnittsstufen ohne die logarithmische Skalierung vorgenommen. Hierfür wird der Plotbereich hinsichtlich der Frequenz eingegrenzt.

Es folgen beispielhafte Darstellungen verschiedener Ausschnitte. Zunächst folgt die Abbildung eines Ausschnitts bis 3,5 Hz.

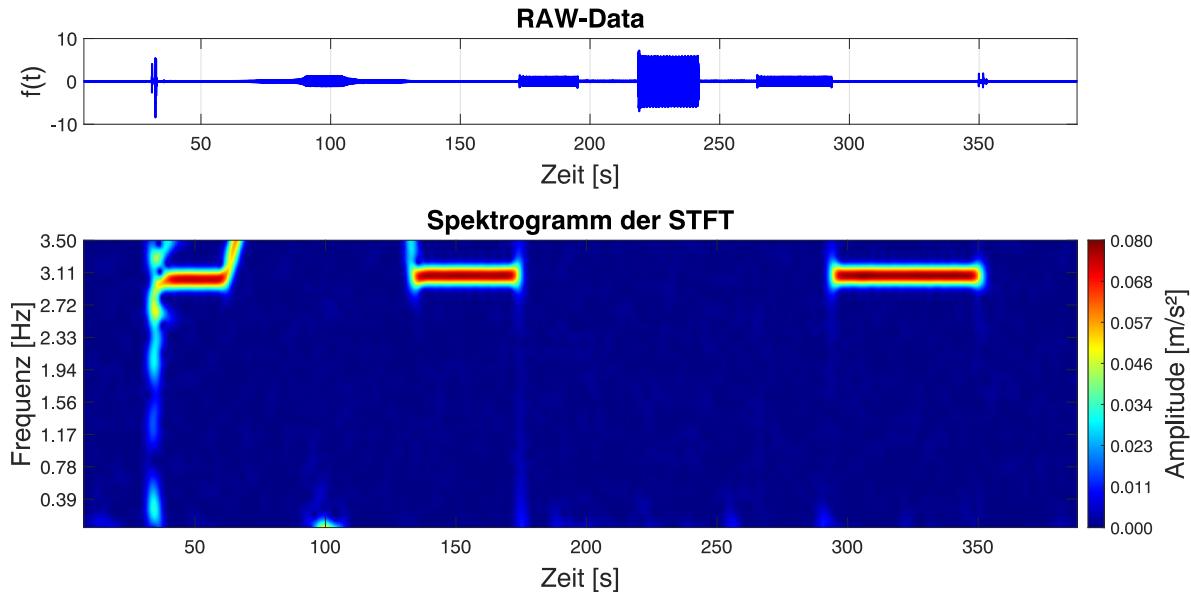


Abbildung 4.29: Labordaten: Erste Zeitreihe von Beschleunigungsdaten auf Schwingungserzeuger, aufgenommen durch ein Samsung SM-S916B/DS (Galaxy S23+), Darstellung bis 3,5 Hz

Bis 7 Hz:

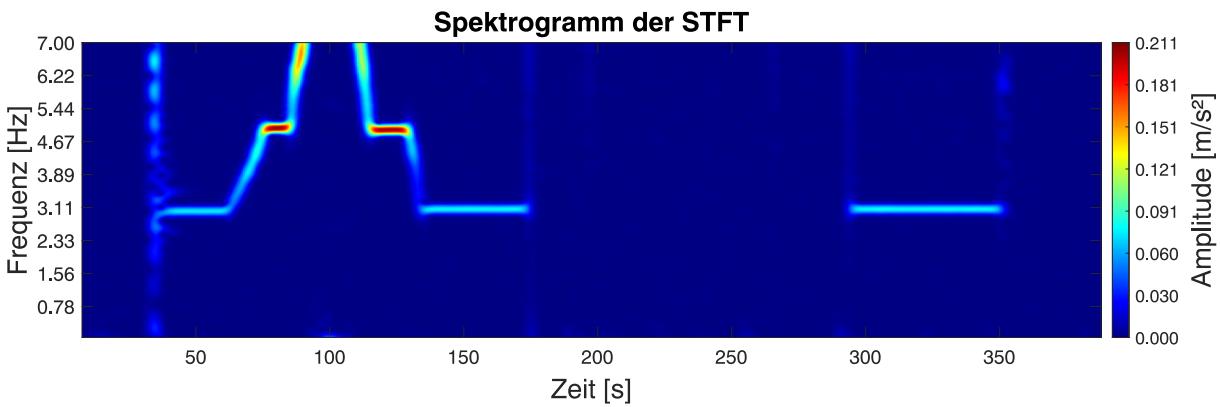
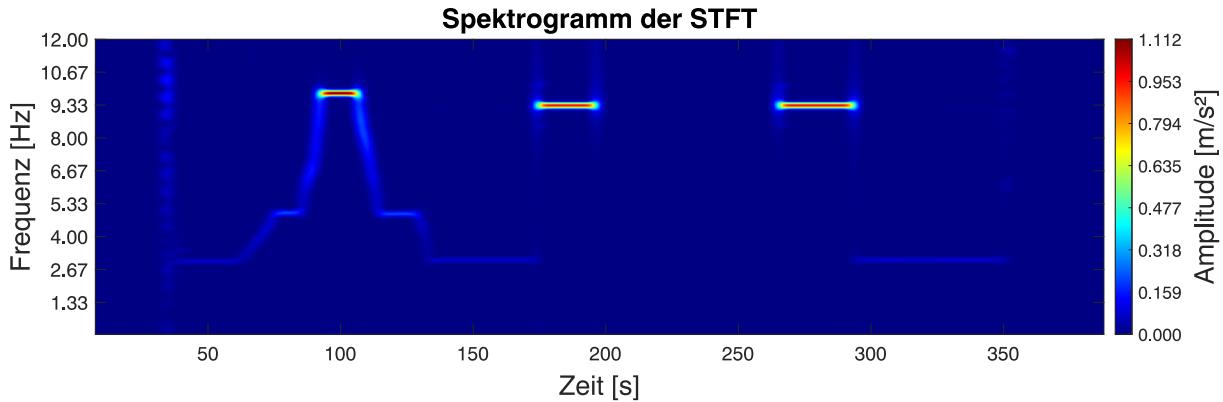


Abbildung 4.30: Labordaten: Erste Zeitreihe von Beschleunigungsdaten auf Schwingungserzeuger, aufgenommen durch ein Samsung SM-S916B/DS (Galaxy S23+), Darstellung bis 7 Hz

und schließlich ein Ausschnitt bis 10 Hz:

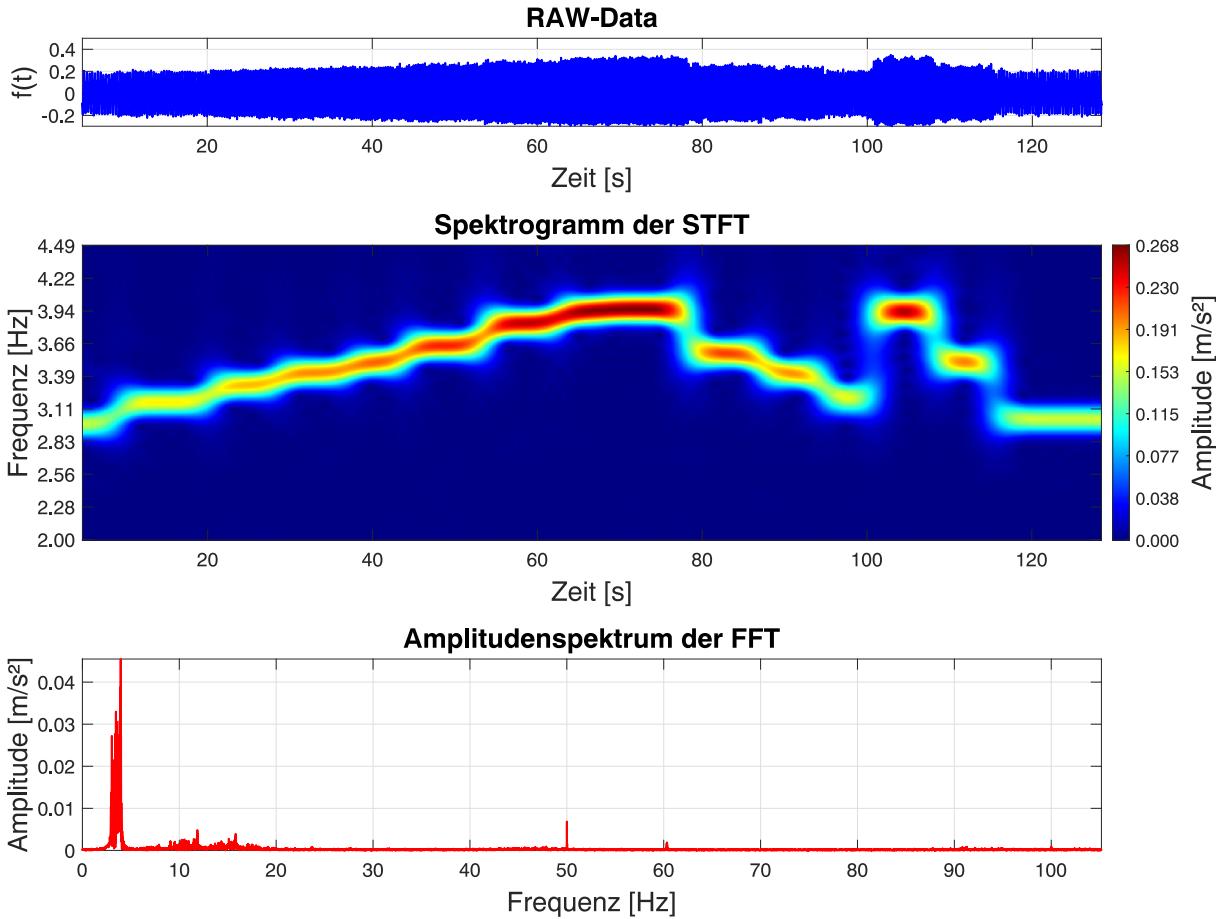


*Abbildung 4.31:* Labordaten: Erste Zeitreihe von Beschleunigungsdaten auf Schwingungserzeuger, aufgenommen durch ein Samsung SM-S916B/DS (Galaxy S23+), Darstellung bis 10 Hz

Deutlich übersichtlicher und einfacher gestaltet sich die Auswertung, wenn die im Signal auftretenden Frequenzen nicht so weit auseinanderliegen. Vorteilhaft an Labormessungen ist der Umstand der freien Wahl der Frequenzen und der „Simulation“ der Zeitreihe und des Messgeschehens.

Aus diesem Grund ist eine zweite Zeitreihe mit dem Smartphone und dem Schwingungserzeuger erhoben worden, in dem die Frequenzwechsel deutlich näher zusammenliegen. Die Frequenzen wurden in einer deutlich höheren Anzahl manuell leicht erhöht und später wieder niedriger geschaltet.

Die nachfolgenden Abbildungen veranschaulichen die Auswertungen dieses Datensatzes.



*Abbildung 4.32:* Labordaten: Zweite Zeitreihe von Beschleunigungsdaten auf Schwingungserzeuger mit nahe zusammenliegenden Frequenzen, aufgenommen durch ein Samsung SM-S916B/DS (Galaxy S23+)

Die Darstellung hat sich in diesem Fall deutlich verbessert, alles ist in einem Frequenzbereich darstellbar und die Amplituden sind gut zu quantifizieren. Jedoch zeigt sich bei so nah zusammenliegenden Frequenzen wiederum der Nachteil, dass die Frequenzen zum Teil ineinander fließen schwer voneinander zu trennen sind. Im Amplitudenspektrum wird dieser Umstand noch deutlicher sichtbar; die Peaks der nahe zusammenliegenden Frequenzen verschmelzen zu einem großen Peak der ein Trennen der Events und einen Informationsgewinn unmöglich macht. Hier sind die Ergebnisse der Gabor-Transformation und die Darstellung im Spektrogramm trotz der ineinander fließenden Frequenzen gegenüber den Ergebnissen der FFT und der Darstellung im Amplitudenspektrum deutlich übersichtlicher und informativer. Die unter Laborbedingungen erhobenen Zeitreihen auf Basis von Beschleunigungsdaten liefern wichtige Erkenntnisse bezüglich Frequenzen, die entweder weit auseinander oder nah zusammen liegen. Zusammenfassend ist zu sagen, dass in beiden Fällen das Spektrogramm der STFT gegenüber dem Amplitudenspektrum der FFT einen erheblich höheren Informationsgehalt bietet.

## 4.4 Auswertung von Daten an Realobjekten

Im vorliegenden Kapitel geht es um die Erprobung der Gabor-Transformation zur Auswertung von Zeitreihen an realen Überwachungsobjekten, nachdem der Auswertealgorithmus an simulierten Daten und an Labordaten als Analysewerkzeug validiert wurde. Hierfür stehen Daten aus mehreren vorherigen Messkampagnen an der Marienkirche Neubrandenburg und der St.-Petri-Kirche Altentreptow zur Verfügung. Bei diesen Überwachungsobjekten werden Bauwerksdeformationen in Folge des Läutens der Glocken und dem Einleiten von Schwingungen in die Bauwerksstruktur erwartet. Hierbei handelt es sich um periodische, harmonische Schwingungsvorgänge, die idealerweise durch die Zeitreihenanalyse und die Gabor-Transformation aufgedeckt werden können. Zur Auswertung steht eine Reihe von Datensätzen an beiden Objekten zur Verfügung, die von einer Vielzahl verschiedener Sensoren erhoben wurden.

### 4.4.1 Kurze Vorstellung der Überwachungsobjekte

#### Marienkirche Neubrandenburg

Die Marienkirche in Neubrandenburg dient bereits seit mehreren Jahren als Mess- und Referenzbauwerk für ingenieurgeodätische Bauwerksüberwachungen. Im Rahmen einer seit 2014 bestehenden Kooperation zwischen der Hochschule Neubrandenburg und der Stadtverwaltung konnte das historische Gebäude kontinuierlich für Forschungsprojekte sowie Abschlussarbeiten in Bachelor- und Masterstudiengängen herangezogen werden. In diesem Zusammenhang gelang es, das Schwingungs- und Bewegungsverhalten der Kirche unter realen Betriebsbedingungen messtechnisch zu erfassen und zu analysieren.

Als stadtprägendes Wahrzeichen lässt sich die Baugeschichte der Marienkirche bis in das Jahr 1248 zurückverfolgen. Nach ihrer Weihe im Jahr 1298 diente sie über mehrere Jahrhunderte hinweg als Hauptpfarrkirche der Stadt. Die Zerstörungen im Jahr 1945 führten zu erheblichen strukturellen Schäden, deren Beseitigung über mehrere Jahrzehnte erfolgte. Ein markanter Meilenstein war die Rekonstruktion des 90 Meter hohen Turms, die 1983 abgeschlossen wurde. Im Zuge der Umnutzung zur Konzertkirche erfolgte im Jahr 2007 der Abschluss der letzten baulichen Maßnahmen durch die Montage eines neuen Glockenstuhls mit fünf neu gegossenen Kirchenglocken.

Anlass für die messtechnischen Untersuchungen war die wahrnehmbare Bewegung des Kirchturms während des Glockenläutens, welche sowohl von Besuchern als auch vom Personal und Industrieletterern als deutliche Auslenkung von bis zu 10 Zentimetern beschrieben wurde. Angesichts potenzieller Risiken für die strukturelle Integrität des Turms erschien eine instrumentelle Überprüfung durch die Hochschule Neubrandenburg und die geodätischen Studiengänge sinnvoll. Die Messdaten widerlegten die subjektiven Einschätzungen: Die tatsächlichen Schwingungsamplituden lagen bei maximal etwa einem Millimeter und stellten keine sicherheitsrelevante Gefährdung für die Bausubstanz dar.

Die gemessenen Deformationen sind eindeutig auf den Betrieb der elektrisch gesteuerten Glockenläuteanlage zurückzuführen, welche die Glocken und dadurch den ganzen Turm in einer Nord-Süd-Richtung in Schwingung versetzt. Die daraus resultierenden Bewegungen des Turms stellen eine dynamische Antwort des Bauwerks dar und erfahren infolge von Resonanzerscheinungen eine Verstärkung um den Faktor drei. Folgende Abbildungen zeigen die Marienkirche Neubrandenburg und ihr Geläut.



Abbildung 4.33: Marienkirche Neubrandenburg



Abbildung 4.34: Geläut der Marienkirche Neubrandenburg

Aufgrund der Vielzahl von Untersuchungen und Messkampagnen aus einer Reihe von Jahren bestehen für die Glockenschwingungen und die Antworten der Bausubstanz (im weiteren Verlauf „Gebäudeantworten“) Referenzwerte für die Frequenzen, welche für diese Arbeit als Vergleichswerte zur Verifikation herangezogen werden. Die Frequenzen stellen ein Mittel aus verschiedenen Sensoren und verschiedenen Messkampagnen dar. Die Frequenzen sind aus der folgenden Tabelle zu entnehmen.

*Tabelle 4.5: Zusammenstellung gemessener Glocken- und Gebäudefrequenzen Marienkirche Neubrandenburg [Engel et al., 2017]*

Glocke	Glocken-frequenz [Hz]	Gebäudefrequenz [Hz]	Faktor
Marienglocke	0,38	1,14	3
Johannesglocke	0,42	1,26	3
Gebetsglocke	0,46	1,40	3
Sakramentsglocke	0,47	1,42	3
Lob- und Dankglocke	0,50	1,50	3

### St.-Petri-Kirche Altentreptow

Die dreischiffige St.-Petri-Kirche im Stil der norddeutschen Backsteingotik ist auf einer natürlichen Erhebung im Zentrum von Altentreptow gelegen. Mit ihren Ausmaßen von etwa 65 m Länge, 25 m Breite und 65 m Höhe prägt sie das Stadtbild deutlich – verstärkt durch ihre erhöhte topografische Lage. Die heutige Baugestalt entstand schrittweise im 13. bis frühen 15. Jahrhundert, wobei sie einen früheren Holzbau ersetzte, der sich im Zuge der städtischen Entwicklung als unzureichend erwies. Im Laufe der Jahrhunderte wurde das Gotteshaus mehrfach erweitert, unter anderem um den Kaufmannschor an der Südseite des Altarbereichs. Der ursprünglich über 90 Meter hohe Turm mit zentralem Helm und vier Eckspitzen wurde durch wiederholte Sturmschäden und Blitzeinschläge zerstört; seit 1770 trägt er die heutige, niedrigere Turmhaube [Kirchengemeinde St. Petri Altentreptow, 2022].

Eine Besonderheit stellt das historische Glockenspiel dar, bestehend aus drei Glocken mit einem Gesamtgewicht von nahezu 8 Tonnen. Die älteste und größte Glocke stammt aus dem Jahr 1431, wiegt 4500 kg und ist auf den Ton cis<sup>1</sup>+3 gestimmt. Die „Apostelglocke“ von 1455 (2500 kg, d<sup>1</sup>±0) ergänzt das Ensemble, ebenso wie die ursprünglich ebenfalls 1431 entstandene, später beschädigte und 1958 neu gegossene „Sonntagsglocke“ (770 kg, fis<sup>1</sup>). Die Glocken wurden in den 1990er Jahren an gerade Holzjoche rückgehängt, nachdem zuvor der Einsatz verkröpfter Stahljoche das Klangbild beeinträchtigte und die Materialspannungen erhöhte [Wamsiedler, 2011].

Für Zwecke der geodätischen Bauwerksüberwachung ist die St.-Petri-Kirche aufgrund ihrer historischen Substanz und der dynamischen Belastung durch das Glockenläuten besonders relevant. Die Glocken sind in Nord-Süd-Richtung ausgerichtet und erzeugen somit Schwingungen, welche sich für die Überwachung mit Werkzeugen der Schwingungs- und Zeitreihenanalyse eignen. Auch die lokale Kirchengemeinde zeigt sich an derartigen Untersuchungen interessiert. Die St.-Petri-Kirche ist in folgender Abbildung in ihren Ausmaßen und ihrer backsteingotischen Bauweise zu sehen. In der darauffolgenden Abbildung ist der historische Glockenstuhl mit Geläut abgebildet, dessen Holz sich im Originalzustand aus den 1430er Jahren befindet.



Abbildung 4.35: St.-Petri-Kirche Altentreptow



Abbildung 4.36: Geläut der St.-Petri-Kirche Altentreptow

Wie für die Marienkirche existieren auch für die St.-Petri-Kirche Altentreptow bereits Referenzfrequenzen der Glockenschwingungen und Gebäudeantworten aus vorherigen Messkampagnen. Diese sind der nachfolgenden Tabelle zu entnehmen.

*Tabelle 4.6: Zusammenstellung gemessener Glocken- und Gebäudefrequenzen St.-Petri-Kirche Altentreptow [Vollert, 2022]*

Glocke	Glocken-frequenz [Hz]	Gebäude-frequenz [Hz]	Faktor
Große Glocke	0,38	1,13	3
Apostelglocke	0,41	1,24	3
Sonntagsglocke	0,47	1,39	3

#### 4.4.2 Auswertung und Ergebnisse von Leica Nivel210 Daten unter Realbedingungen

Eingangs ist zu sagen, dass es sich bei den Inhalten dieser Arbeit um die Validierung von Auswertealgorithmen handelt, nicht um die Validierung von Sensoren und die Datenerhebung. Aus diesem Grund und aus Gründen der Übersichtlichkeit sind nur ein oder selten zwei Datensätze pro Sensor ausgewählt, um in den nachfolgenden Kapiteln gezeigt zu werden. Dabei handelt es sich um die besten Daten oder solche, die besonders interessante Umstände in Bezug auf die Auswertung mit der Gabor-Transformation zeigen. Insgesamt wurden 26 verschiedene Messdatensätze verschiedener Jahre und verschiedener Sensoren ausgewertet.

Den Start sollen dabei Daten eines Leica Nivel210 machen, da von diesem Instrument besonders rauscharme, hochauflöste und präzise Daten zu erwarten sind. Obwohl dem Instrument nachgesagt wird, dass es sich aufgrund seiner Funktionsweise als Flüssigkeitssystem nicht für die Überwachung von hochfrequenten Schwingungen eignet, haben Arbeiten wie [Engel et al., 2017], [Vollert, 2022], [Engel et al., 2020] und [Köster et al., 2019] Gegenteiliges bewiesen.

Durch die Gabor-Transformation ausgewertet wurde ein Nivel210 Datensatz aus einer Messkampagne an der St.-Petri-Kirche Altentreptow aus dem Jahr 2022. Die nachfolgende Abbildung zeigt den Sensor am Messort.



Abbildung 4.37: Realdaten: Leica Nivel210 am Messort in der St.-Petri-Kirche Altentreptow 2022

Im Anschluss folgen die Ergebnisse der Auswertung des Leica Nivel210 mit der Gabor-Transformation. Dargestellt sind die Rohdaten oben, das Spektrogramm in der Mitte und das Amplitudenspektrum der FFT unten.

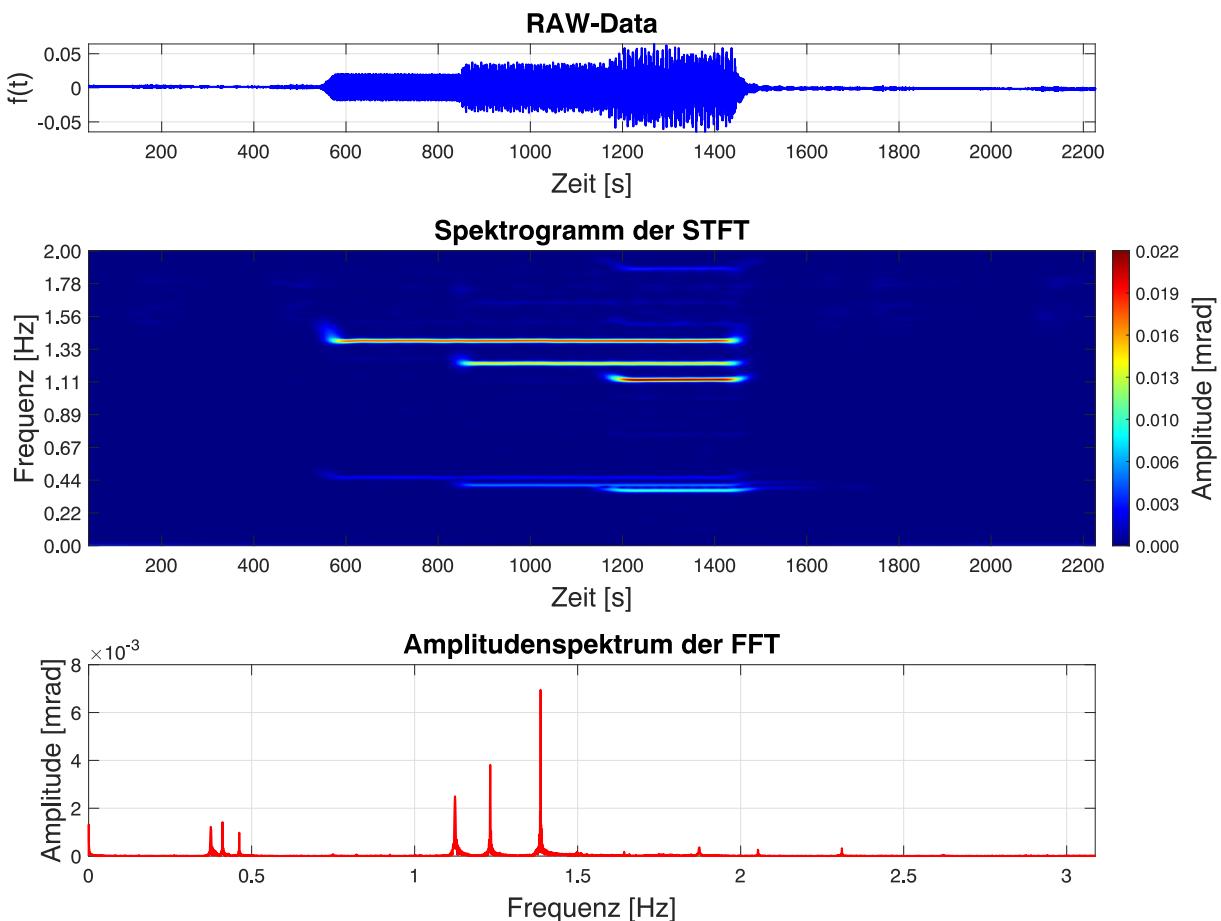
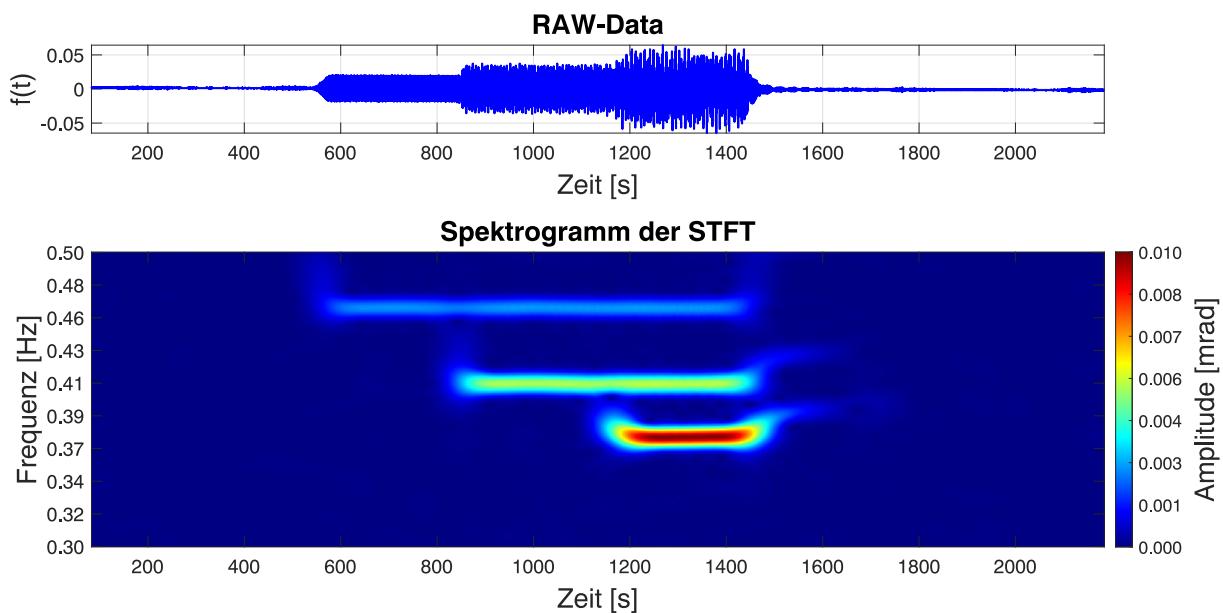


Abbildung 4.38: Realdaten: Ergebnisse der Auswertung von Leica Nivel210 Daten mit der Gabor-Transformation an der St.-Petri-Kirche Altentreptow 2022

Der erste Blick auf das Spektrogramm zeigt sehr scharf aufgelöste und rauscharme Daten. Das Einsetzen und Abklingen aller drei Glocken ist genau zu erkennen. Bei Vergleich mit der [Tabelle 4.6](#) sind die Gebäudeantworten klar zu erkennen. Die Gebäudeantwort der Sonntagsglocke ist mit 1,39 Hz bestimmt worden, die Gebäudeantwort der Apostelglocke mit 1,23 Hz und die Gebäudeantwort der Großen Glocke mit 1,13 Hz. Das entspricht im Wesentlichen exakt (bis auf die Apostelglocke) den Referenzfrequenzen. Plausibel ist, dass die Mauerschwingung der Großen Glocke die höchste Amplitude hat, da es sich bei dieser um die schwerste Glocke handelt. Interessant ist jedoch der Umstand, dass die Apostelglocke als zweitschwerste Glocke nicht die zweithöchste Amplitude hat, sondern die Sonntagsglocke. Auch im Rahmen dieser Auswertung wird die Schwäche der FFT bei Blick auf das Amplitudenspektrum deutlich. Alle Amplituden werden deutlich geringer durch die FFT ermittelt als durch die Gabor-Transformation, teilweise bis um die Hälfte geringer. Das liegt am Umstand, dass die FFT die gesamte Zeitreihe ausgewertet hat, die Signale jedoch nicht konstant über diesen Auswertezeitraum vorhanden sind. Dann werden die Amplituden niedriger bestimmt, als sie eigentlich sind - ein gefährlicher Umstand beispielsweise im Kontext einer ausbleibenden Alarmierung bei kritischer Bauwerksbewegung. Es folgt ein gezoomter Ausschnitt auf die Glockenfrequenzen, um diese zu analysieren.



*Abbildung 4.39:* Realdaten: Ergebnisse der Auswertung von Leica Nivel210 Daten mit der Gabor-Transformation an der St.-Petri-Kirche Altentreptow 2022 - gezoomter Ausschnitt

Auch aus dieser Darstellung sind die Parameter der Glocken gut zu interpretieren. Die Frequenz der Sonntagsglocke ist mit 0,46 Hz bestimmt worden, die der Apostelglocke mit 0,41 Hz und die der Großen Glocke mit 0,387 Hz. Das entspricht im Rahmen der Toleranzen der Referenzfrequenzen aus [Tabelle 4.6](#). Die Zeitpunkte des Einsetzens der Glocken, die Frequenzen und die Amplituden sind klar und deutlich zu quantifizieren. Bei

den Glockenfrequenzen sind die Amplituden plausibel abgestuft, die Große Glocke weist die höchste Amplitude auf, die Sonntagsglocke die niedrigste.

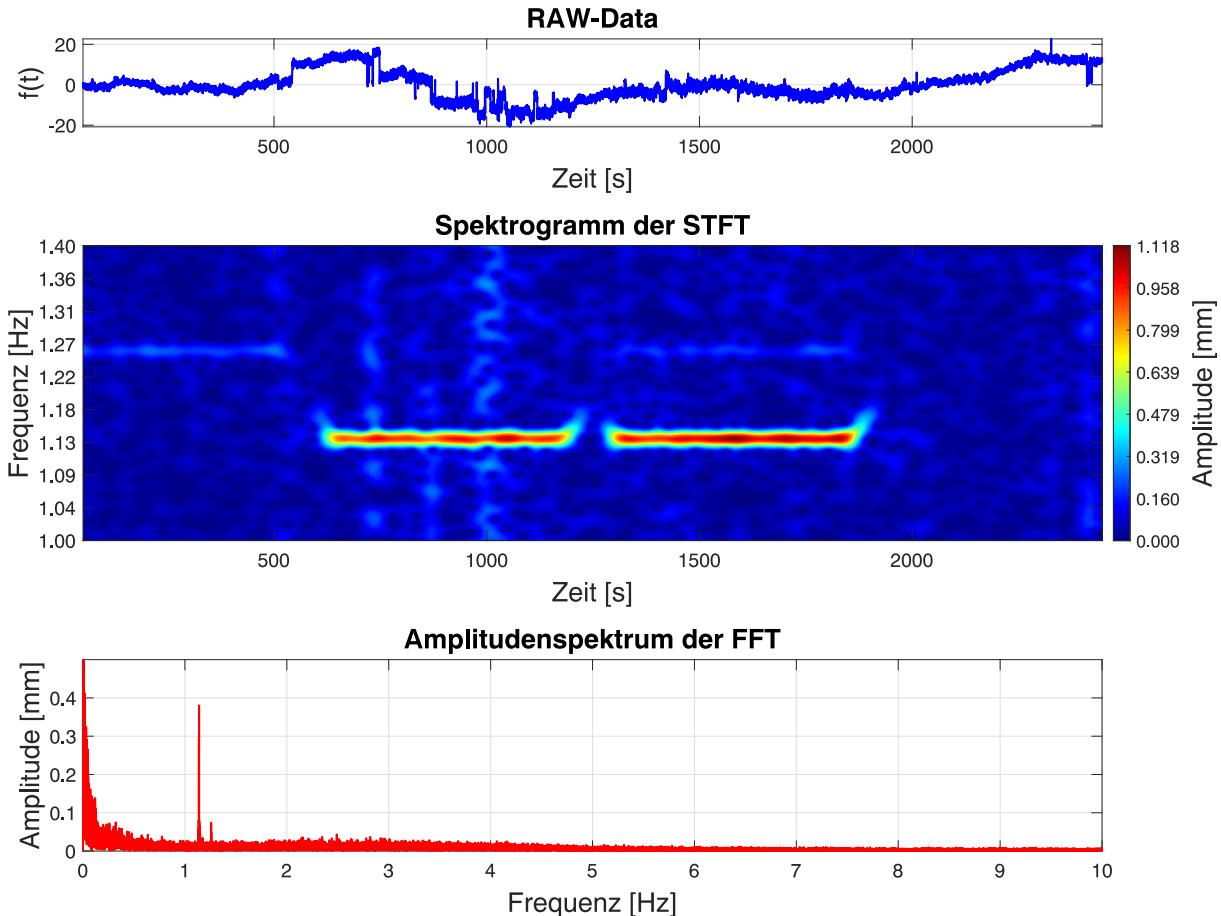
#### 4.4.3 Auswertung und Ergebnisse von GNSS Daten unter Realbedingungen

Es folgt die Auswertung von GNSS-Daten mit der Gabor-Transformation. Hierfür standen eine Reihe von Datensätzen verschiedener Empfänger zur Verfügung. Die Wahl fiel hierbei auf einen Messdatensatz mit kostengünstigem Equipment, sowohl in Bezug auf den Empfänger als auch die Antenne, da die erreichten Ergebnisse mit Blick auf die Anschaffungskosten besonders bemerkenswert sind. Verwendet wurde der in [Tabelle 4.2](#) beschriebene Empfänger des Herstellers u-blox. Dieser wurde durch eine Antenne des Herstellers ArduSimple komplettiert und bei einer Überwachungsmessung an der Marienkirche Neubrandenburg im Jahr 2024 eingesetzt.



Abbildung 4.40: Realdaten: GNSS-Antenne an der Marienkirche Neubrandenburg im Jahr 2024

Folgende Abbildung zeigt die Ergebnisse der Auswertung der an der Marienkirche in Neubrandenburg 2024 mit kostengünstigen GNSS-Sensoren erfassten Zeitreihe. Ersichtlich sind die Rohdaten oben, das Spektrogramm der Gabor-Transformation in der Mitte und das Amplitudenspektrum der FFT unten.



*Abbildung 4.41:* Realdaten: Ergebnisse der Auswertung von GNSS-Daten mit der Gabor-Transformation an Marienkirche Neubrandenburg - Sensor: kostengünstiger u-blox ZED-F9P-04B mit ArduSimple Antenne

Aus der Grafik ist erkennbar, dass das Rauschen deutlich höher ist als noch zuvor bei den Nivel210-Daten. Dieser Umstand ist in der Sensorsauflösung und Genauigkeit begründet. Die zu überwachende Amplitude von rund einem Millimeter stellt bereits die erreichbaren Grenzen von GNSS dar und bewegt sich an der Grenze der Auflösung und der Genauigkeit des Empfängers. Dennoch ist sehr bemerkenswert, welche stark signifikanten Ergebnisse durch den kostengünstigen GNSS-Empfänger in Verbindung mit der Auswertung durch die Zeitreihenanalyse erreicht werden können. Ein Erkenntnisgewinn und ein Ablesen der Parameter der Gebäudeschwingung der Marienglocke, bei der es sich um die größte Glocke mit der kleinsten Frequenz handelt, ist in vollem Maße möglich. Jedoch sind die Gebäudeschwingungen der übrigen Glocken nicht mehr ablesbar. Diese bewegen sich in einer Größenordnung, die durch die Auflösung des GNSS-Empfänger nicht mehr aufzudecken

sind. Lediglich die Gebäudeantwort der nächstgrößeren Glocke, der Johannesglocke, ist im Spektrogramm zu erahnen, allerdings nicht quantifizierbar abzulesen. Die Frequenz der Gebäudeantwort der Marienglocke ist im Spektrogramm mit 1,14 Hz und einer Amplitude von rund 1,05 mm bestimmt worden. Der Wert entspricht exakt der Referenzfrequenz aus der Tabelle 4.5.

#### 4.4.4 Auswertung und Ergebnisse von Beschleunigungsdaten auf MEMS-Basis unter Realbedingungen

Es folgen die Ergebnisse der Auswertung einer Zeitreihe von Beschleunigungsdaten, die im Rahmen einer Messkampagne 2021 an der St.-Petri-Kirche Altentreptow mit einem Huawei P20 Pro (CLT-L09) Smartphone erfasst wurden. Das Smartphone wurde während des Glockenläutens direkt auf dem Glockenstuhl platziert und mit Klebeband fixiert. Während der Messung konnte aufgrund eines Defekts in der Läuteanlage die Apostelglocke nicht betätigt werden. Aus diesem Grund sind in den folgenden Ergebnissen lediglich die Große Glocke und die Sonntagsglocke sichtbar.

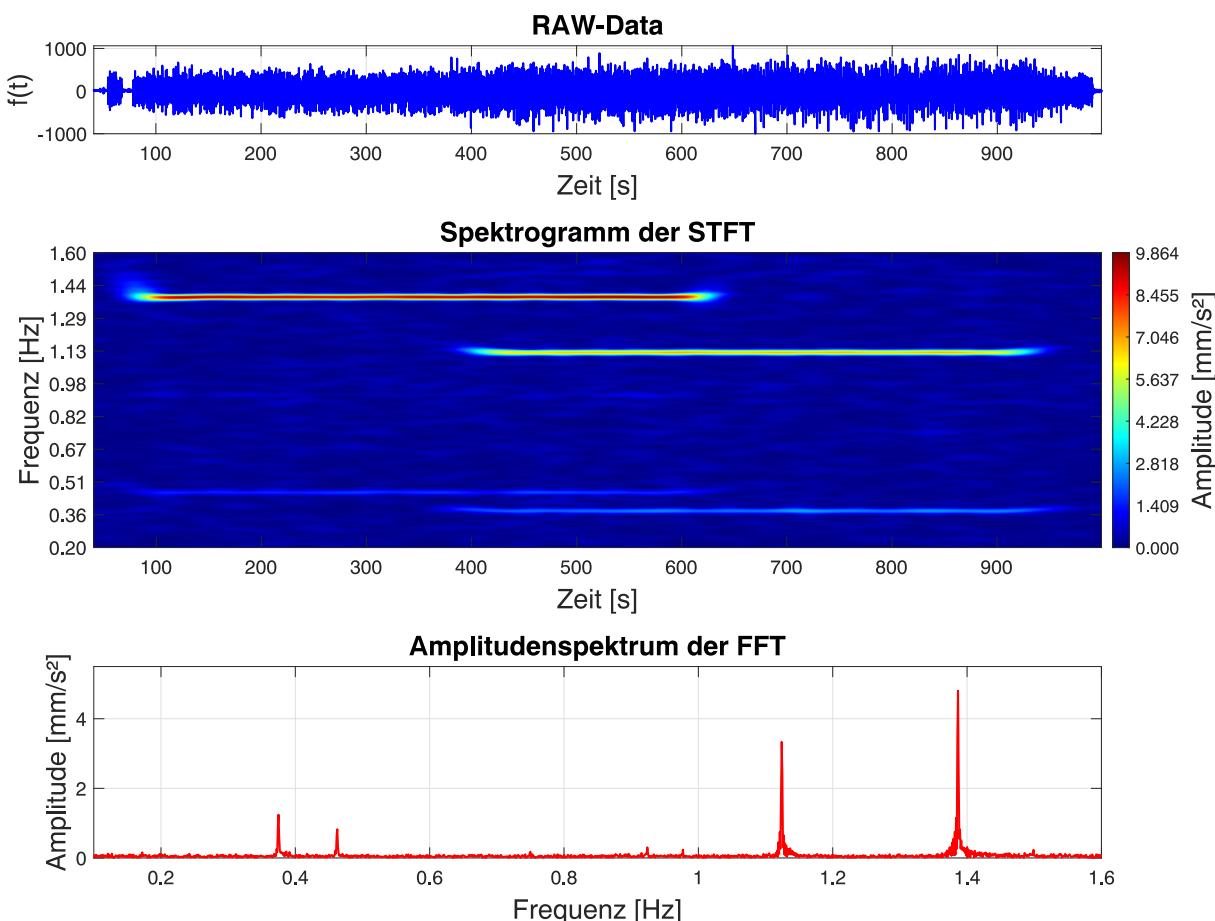


Abbildung 4.4.2: Realdaten: Ergebnisse der Auswertung von Beschleunigungsdaten auf MEMS-Basis mit der Gabor-Transformation an St.-Petri-Kirche Altentreptow - Sensor: Huawei P20 Pro (CLT-L09)

Bei dem Blick auf Abbildung 4.42 fällt ein sauberes, rauscharmes Spektrum auf, in dem die zwei wirkenden Glocken sowohl mit den Glockenschwingungen selbst, als auch mit den Gebäudeschwingungen sauber zu erkennen und zu quantifizieren sind. Die Gebäudefrequenz der Großen Glocke ist hierbei mit 1,13 Hz bestimmt worden, die der Sonntagsglocke mit 1,39 Hz. Die Glockenfrequenz der Großen Glocke beträgt hierbei 0,38 Hz, die Glockenfrequenz der Sonntagsglocke ist mit 0,47 Hz ermittelt worden. Diese Werte entsprechen exakt den Referenzfrequenzen der St.-Petri-Kirche aus Tabelle 4.6.

#### 4.4.5 Auswertung und Ergebnisse von Leica Tachymeter Daten unter Realbedingungen

Komplettiert wird die Validierung des Auswertealgorithmus der Gabor-Transformation an Richtungsmessdaten, welche durch ein Leica TS30 Tachymeter an der Marienkirche Neubrandenburg 2017 erfasst wurden.

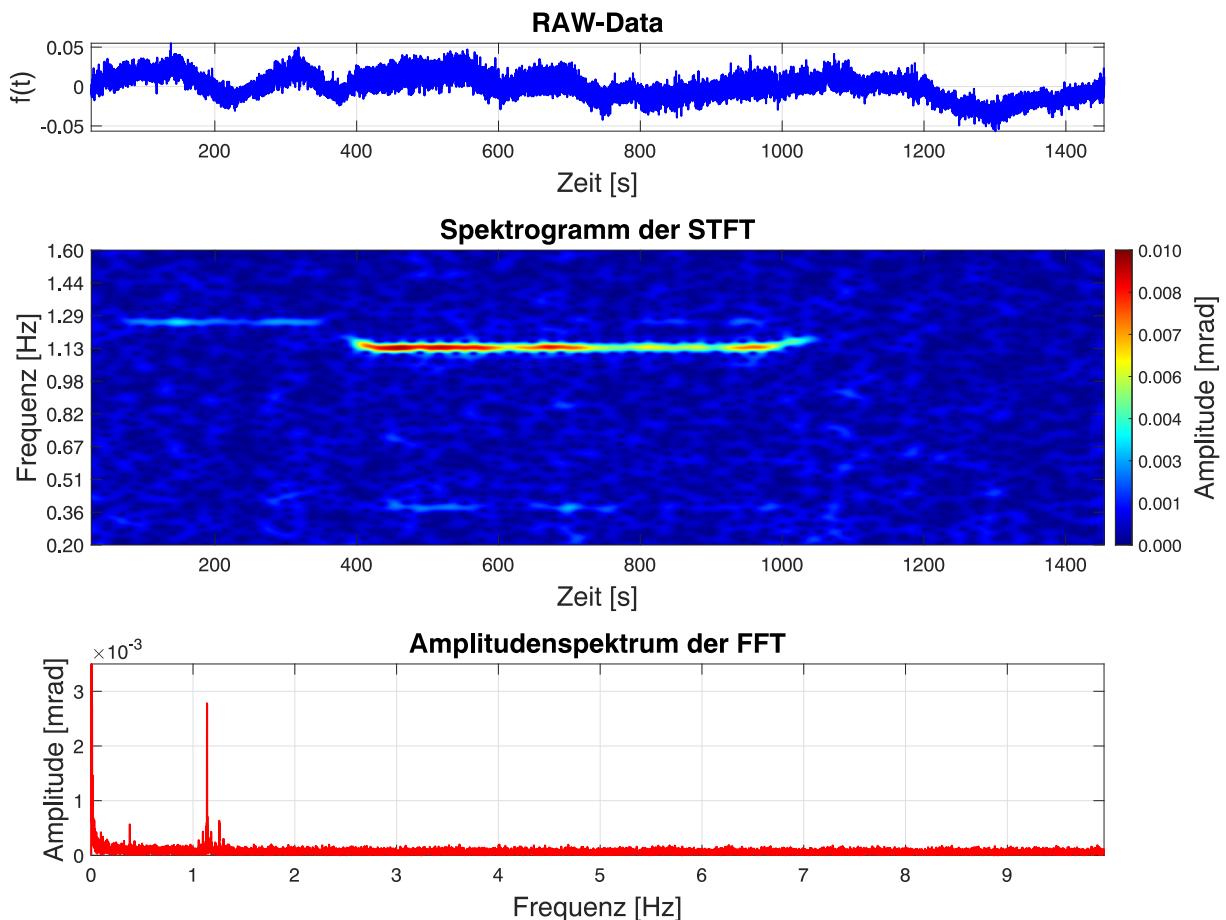


Abbildung 4.43: Realdaten: Ergebnisse der Auswertung von Richtungsbeobachtungen mit der Gabor-Transformation an Marienkirche - Sensor: Leica TS30

In der Abbildung 4.43 wird wiederholt ein rohes Rauschniveau deutlich. Die Gebäude-

schwingung der Marienglocke ist deutlich sichtbar, die dazugehörige Glockenschwingung lässt sich wie auch die Gebäudeschwingung der Johannesglocke lediglich erahnen, jedoch nicht quantifizieren. Grund hierfür ist die Sensorsauflösung, die Auflösung und Genauigkeit der Richtungsbeobachtungen des Leica TS30 reichen nur bedingt aus, um die Gebäude deformationen, hervorgerufen durch das Glockenläuten, aufzudecken. Dieser Umstand ist auch in den Rohdaten mit einem erhöhten Rauschen und kurzweiligen Trendscheinungen sichtbar. Die Schwingung ist in den Rohdaten nicht direkt zu erkennen, anders als beispielsweise bei den Daten eines Nivel210 ([Abbildung 4.38](#)), in dem die einzelnen Events schon in den Rohdaten klar erkennbar sind. Dennoch ist der Auswertealgorismus fähig, das Signal, also die Deformation des Bauwerks, signifikant zu detektieren. Die Ansicht im Spektrogramm bietet zudem einen deutlich höheren Informationsgehalt als die Darstellung im Amplitudenspektrum der FFT. Die Gebäudeschwingung der Marienglocke wurde mit 1,14 Hz entsprechend der Referenzfrequenz der [Tabelle 4.5](#) korrekt ermittelt.

# 5 Validierung der Verfahren und wissenschaftliche Diskussion

„Alles was lediglich wahrscheinlich ist, ist wahrscheinlich falsch.“

---

(René Descartes, 1596 – 1650)

In wissenschaftlicher Arbeitsweise soll in diesem Kapitel eine Diskussion der angewendeten Methodik, der Verfahren und der Ergebnisse vorgenommen werden, um diese zu validieren. Eine grundsätzliche Validierung der Gabor-Transformation zur Auswertung von Zeitreihen in der geodätischen Bauwerksüberwachung ist im Rahmen der vorliegenden Arbeit dreistufig vorgenommen worden:

## **Validierung der Gabor-Transformation durch simulierte Daten**

In diesem Teil der Arbeit ist die Gabor-Transformation zunächst an simulierten Daten erprobt worden. Dieser Schritt dient einem Erkenntnisgewinn über die Wirkungsweise und die Reaktion der Gabor-Transformation auf steuerbare Sachverhalte innerhalb von Zeitreihen sowie typisch auftretende Anomalien und Artefakte in den Datenbeständen. Dieses Vorgehen bietet die einzigartige Möglichkeit, entscheidende Parameter wie Rauschanteile und Ähnliches aktiv zu steuern und die Reaktion des Auswertealgorithmus darauf zu evaluieren.

## **Validierung der Gabor-Transformation durch Daten, erhoben unter Laborbedingungen**

An dieser Stelle der Validierung kommen erstmalig echte Messdaten zum Einsatz. Diese sind zwar unter kontrollierten Bedingungen erhoben worden, weisen jedoch realitätsnahe Eigenschaften auf, wie zum Beispiel individuelles Rauschverhalten eines jeden Sensors, Driftverhalten und Ähnliches. Dennoch sind die zu erwartenden Sollergebnisse bekannt, da die Messungen auf einem Schwingungserzeuger durchgeführt wurden, an dem feste und bekannte Werte hinsichtlich der Frequenz und der Amplitude der Schwingung einstellbar sind. Durch diesen Validierungsschritt wurde die Gabor-Transformation erstmalig an realen Messdaten getestet. Dies gewährleistet eine grundsätzliche Eignung der Gabor-Transformation unter Realbedingungen, um im letzten Schritt Messdaten an realen Überwachungsobjekten auszuwerten.

## **Validierung der Gabor-Transformation durch Daten, erhoben an Überwachungsobjekten unter Realbedingungen**

In diesem letzten Schritt wird die Gabor-Transformation an Daten getestet und validiert, die unter realen Messbedingungen an Überwachungsobjekten erhoben wurden, die

tatsächliche Deformationen aufweisen. Um die Validierung umzusetzen, wurden Überwachungsobjekte gewählt, bei denen die Parameter der Deformationen hinsichtlich Amplitude und Frequenz durch eine Vielzahl an vorherigen Messungen verschiedenster Sensoren bekannt sind und signifikant nachgewiesen wurden. Dadurch können die Ergebnisse der Gabor-Transformation mit den vorherigen Ergebnissen verglichen und bestätigt werden. In dieser Vorgehensweise konnte eine Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen der Gabor-Transformation und den Ergebnissen vorheriger Messkampagnen und erprobter Auswerteverfahren nachgewiesen werden. Durch die dreistufige Validierung der Gabor-Transformation konnte die grundsätzliche Eignung dieser zur Auswertung von Zeitreihen in der ingenieurgeodätischen Bauwerksüberwachung bestätigt werden. Es bleibt eine Abwägung der Vor- und Nachteile gegenüber erprobten Analyseverfahren vorzunehmen.

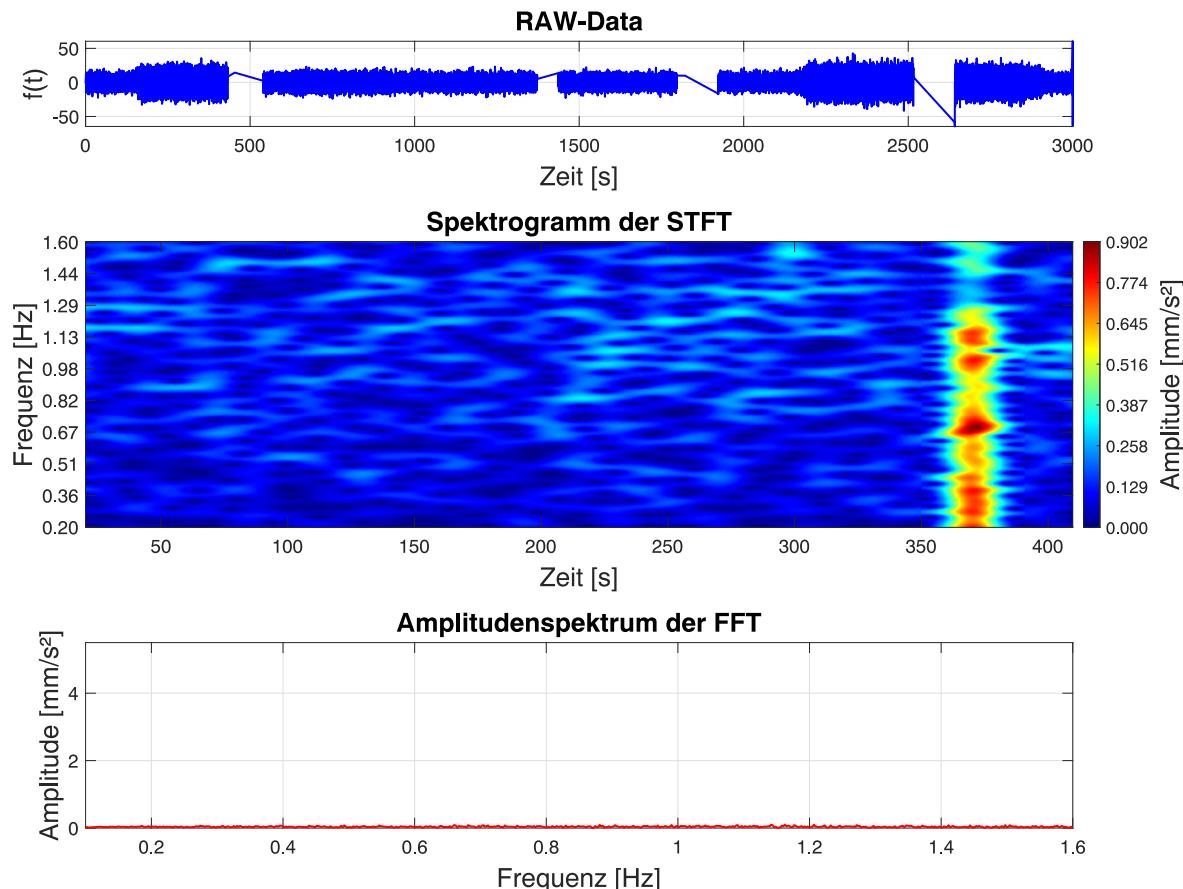
## 5.1 Grenzen des Verfahrens

Während der praktischen Auswertung von Zeitreihen mit der Gabor-Transformation sind trotz entscheidender Vorteile gegenüber anderen erprobten Auswerteverfahren einige Grenzen des Auswertealgorithmus aufgefallen. Vor allem bei sehr langen Zeitreihen von >500.000 Datenpunkten schlägt der gegenüber der FFT ein deutlich höhere Rechenaufwand in der Rechenzeit zu Buche. Der Grund dafür liegt in der Vielzahl an komplexen Rechenoperationen, die für die Berechnung der Kurzzeit-Fourier-Transformation nötig sind und vor allem in der Tatsache, dass abhängig vom Verschiebungspараметer  $\tau$  pro Verschiebung des Analysefensters eine neue Berechnung vorgenommen werden muss. Wenn bei solch langen Zeitreihen der Verschiebungsparameter besonders gering gesetzt wird, es also eine hohe Zahl an Analysefenstern gibt, die zu berechnen sind, dann steigt der Rechenaufwand enorm. Für die Berechnungen wurde ein Notebook mit großer SSD, 16 GB RAM und einer 12-Kern Intel Core i9-13900H CPU verwendet. Trotz dieser vergleichsweise hohen zur Verfügung stehenden Rechenleistung wurde das System bei der Auswertung langer Zeitreihen mehrfach zum Komplettabsturz mit *Blue-Screen* und automatischem Neustart forciert. Für die Auswertung sehr langer Zeitreihen sind Systeme mit mehr Rechenleistung notwendig. Abhilfe für dieses Problem schuf eine Reduzierung der Datenpunkte durch Mitteln von 5 Datenpunkten zu einem (inklusive Zeitstempeln, Messdaten, etc.) wodurch auch die Aufnahmefrequenz künstlich verschlechtert wurde.

Eine weitere Grenze des Verfahrens stellen zu weit auseinander oder zu nah zusammen liegende Frequenzen dar. Diese beiden Fälle äußern sich jedoch unterschiedlich. Wenn die im Signal enthaltenen Frequenzen zu weit auseinander liegen, so kommt es häufig zu Darstellungsproblemen im Spektrogramm. Oftmals haben aufgrund der in Formel (4.1) und der in Abbildung 4.28 dargestellten Sachverhalte die höheren Frequenzen eine höhere Energie, also Amplitude. Dadurch entsteht das Problem, die großen und kleinen Amplituden zusammen auf einer Farbskala darzustellen. Oftmals werden dann die hohen Amplituden gut dargestellt, die kleinen Amplituden der niedrigen Frequenzen sind jedoch kaum erkennbar. Eine Möglichkeit der Abhilfe wurde bereits durch eine logarithmische Skala vorgestellt, jedoch ist der Betrag der Amplituden dann nicht mehr direkt ablesbar beziehungsweise vergleichbar. Wenn die Frequenzen zu nah zusammenliegen, fließen

sie unter Umständen ineinander und sind nicht voneinander zu trennen. Begünstigt wird dieses Problem durch eine schlechte Frequenzauflösung, wodurch die Events im Signal in Bezug auf die Frequenzachse breiter werden und eher dazu neigen, zu verschmelzen. Ähnliche Probleme treten jedoch auch im erprobten Auswerteverfahren mittels der Fast-Fourier-Transformation auf. Dort verschmelzen bei nah zusammenliegenden Frequenzen mehrere Events zu einem Peak, die eigentlich voneinander getrennt sind. Im Rahmen der Gabor-Transformation kann diesem Problem mit einer höheren Frequenzauflösung entgegengewirkt werden.

Obwohl in [Kapitel 2.4.5](#) und [Abbildung 2.7](#) gezeigt wurde, dass der Auswertealgorismus robust gegenüber Datenlücken im Signal zu sein scheint, weist auch dieser Sachverhalt Grenzen auf. Im Rahmen der praktischen Datenauswertung von Messdaten an realen Überwachungsobjekten wurde ein Datensatz von Beschleunigungsdaten ausgewertet, der vier vergleichsweise große Datenlücken im geringen, einstelligen Minutenbereich aufwies, vermutlich hervorgerufen durch mehrmaligen Neustart der Datenaufnahme. Der Auswertealgorismus war nicht fähig, interpretierbare Ergebnisse über diese Datenlücken hinaus zu liefern. Zur Anschauung soll die Auswertung dieses Datensatzes an dieser Stelle gezeigt werden.



*Abbildung 5.1:* Grenzen des Verfahrens: Ergebnisse der Auswertung von Beschleunigungsdaten mit der Gabor-Transformation an Marienkirche und großen Datenlücken - Sensor: Samsung Galaxy S5 Mini

Der Grafik ist zu entnehmen, dass im Rahmen der Auswertung der von Datenlücken behafteten Zeitreihe keine verwertbaren Ergebnisse ermittelt wurden. Eine sinnvolle Behandlung der Datenlücken ist notwendig, allerdings sind die Lücken zu groß für Interpolationsverfahren. Als einzige Möglichkeit des Informationsgewinns bleibt lediglich, die Stücke der Zeitreihe zwischen den Datensprüngen einzeln auszuwerten. Auf diesen Schritt wurde an dieser Stelle verzichtet.

## 5.2 Thesen

Im Rahmen dieser Arbeit wurden im praktischen Umgang mit der Gabor-Transformation wichtige Erkenntnisse gesammelt. Sowohl die positiven Effekte als auch die Grenzen und Nachteile der Auswertung von ingenieurgeodätischen Zeitreihen mit Hilfe der Gabor-Transformation sollen an dieser Stelle anschaulich zusammengefasst werden. Zur plakativen Darstellung werden Thesen formuliert, die die Erfahrungen und Erkenntnisse im Umgang mit dem Analyseverfahren verkörpern.

### + Zeitinformation

Bei Verwendung der Gabor-Transformation zur Analyse wird die Zeit als wichtiger Parameter berücksichtigt und dargestellt, dadurch dass den Spektralkomponenten Zeitintervalle zugewiesen werden. Bei Verwendung der klassischen FFT ist die Zeitinformation nicht ohne weiteres darstellbar, da diese in den Phasen der komplexwertigen Fourier-Koeffizienten enthalten ist. Die STFT beziehungsweise Gabor-Transformation erlaubt eine zeitbezogene Analyse, es kann im Spektrogramm abgelesen werden, welche Signalanteile zu welcher Zeit auftreten und wieder abklingen. Das ist der größte und entscheidende Vorteil der Gabor-Transformation gegenüber der Fast-Fourier-Transformation.

### + Übereinstimmende Ergebnisse von FFT und Gabor-Transformation

Unter der Bedingung, dass im Analysefenster das zu analysierende Signal konstant enthalten ist, liefern die Fast-Fourier-Transformation und die Gabor-Transformation gleichwertige Ergebnisse. Sowohl Frequenz als auch Amplitude werden von beiden Analyseverfahren exakt gleich ermittelt. Damit ist die Gabor-Transformation gegenüber dem erprobten Verfahren der Fast-Fourier-Transformation hinsichtlich gleicher Ergebnisse validiert.

### + Verfälschung der Amplituden bei der FFT

Sofern die zuvor genannte Bedingung nicht erfüllt ist, also das zu analysierende Signal (Frequenz und Amplitude) nicht über das gesamte Analysefenster konstant vorhanden

ist, so werden die Amplituden von der Fast-Fourier-Transformation zu niedrig berechnet. Dieser Punkt ist enorm kritisch und insofern gefährlich, als dass eine Alarmierung, wenn eine Deformation einen Grenzwert überschreitet, ausbleibt und verschlafen wird. Dieses Problem tritt bei der STFT beziehungsweise der Gabor-Transformation nicht auf; in jedem Fall werden die Amplituden unabhängig vom Signalverlauf im Analysefenster korrekt bestimmt.

### **+ Keine Notwendigkeit einer manuellen Fensterung**

Um dem zuvor genannten Problem mit der FFT vorzubeugen, ist es bisher in diesem Zusammenhang üblich, manuell einen passenden Signalausschnitt zu bestimmen, in dem das zu analysierende Signal konstant ist, und dieses Analysefenster mittels der FFT auszuwerten. Dies ist mit erheblichem, händischen Aufwand verbunden, einen idealen Signalausschnitt in Verbindung mit einer passenden Fensterbreite zu finden. Im Zusammenhang mit der Analyse unter Verwendung der Gabor-Transformation ist diese Art von manueller Fensterung nicht mehr notwendig. Der Auswertealgorithmus schiebt ein Analysefenster gewisser Breite selbstständig Stück für Stück um den Verschiebungspараметer  $\tau$  über den gesamten Verlauf der Zeitreihe.

### **+ Workflow Zeit- vs. Frequenzauflösung**

Um dem Kompromisszwang zwischen Zeit- und Frequenzauflösung vorzubeugen, ist ein Work-Flow denkbar, der die zeitliche Information zunächst bei hoch geschalteter Zeitauflösung quantifiziert, um im Anschluss die gewünschten Frequenzinformationen bei hoch geschalteter Frequenzauflösung zu quantifizieren. Danach würden die Informationen von Zeit und Frequenz zusammengeführt werden.

#### **- Zeit- vs. Frequenzauflösung**

Aufgrund der HEISENBERG'schen Unschärferelation können Zeit und Frequenz nicht beliebig hoch aufgelöst werden. Wird die Frequenzauflösung erhöht, so verschlechtert sich die Zeitauflösung; andersherum verhält es sich reziprok. Es muss deshalb stets ein Kompromiss zwischen Zeit- und Frequenzauflösung gefunden werden, um einen bestmöglichen Informationsgewinn und eine bestmögliche Darstellung im Spektrogramm zu erreichen.

#### **- Normierung der Fensterfunktion**

Bei der Verwendung einer Fensterfunktion zur Dämpfung der Messwerte wie dem GAUSS-Fenster muss die Fensterfunktion normiert werden, da ansonsten die Amplituden falsch skaliert und nicht in einem korrekten Betrag berechnet werden. Dieser Umstand gilt besonders im Rahmen der Auswertung mit der Gabor-Transformation, bei der stets eine

Fensterfunktion verwendet wird, aber auch bei der FFT, sollte dort eine Multiplikation mit einer Fensterfunktion erfolgen. Für die Normierung wird die Fensterfunktion durch die Summe der Punkte der Fensterfunktion geteilt, sodass die Summe der Punkte der Fensterfunktion danach 1 ergibt. So werden die Daten sowie die Amplituden in ihrem Betrag nicht skaliert.

### **- Frequenzen zu nah zusammen**

Wenn die Frequenzen mehrerer Events zu nah zusammenliegen, können sie zu einem Event verschmelzen. Eine schlechte Frequenzauflösung begünstigt diesen negativen Effekt. Dieser Effekt tritt ebenfalls bei Verwendung der FFT auf: Wenn die Frequenzauflösung zu schlecht ist, verschmelzen die Peaks zweier Events zu einem und sind nicht voneinander zu trennen. Eine Lösung für dieses Problem ist eine Erhöhung der Frequenzauflösung.

### **- Frequenzen zu weit auseinander**

Wenn die Frequenzen zu weit auseinanderliegen, kann es zu Darstellungsproblemen im Spektrogramm kommen. Grund dafür ist, dass die gesamte Bandbreite aller Amplituden auf einer Farbskala dargestellt werden muss. Sollten die höheren Frequenzen eine größere Energie und Amplitude aufweisen, so sind die Amplituden mit geringerem Betrag von der Farbe des Grundrauschens kaum zu unterscheiden. Abhilfe schafft eine logarithmische Skalierung der Amplituden; jedoch kann dann die Amplitude nicht ohne weiteres abgelesen werden und muss vorher aus der logarithmischen Darstellung in eine lineare Darstellung rücktransformiert werden.

# 6 Zusammenfassung und Ausblick

„Die Zukunft sollte man nicht voraussehen wollen, nur möglich machen.“

---

(Antoine de Saint-Exupéry, 1900 - 1944)

## 6.1 Zusammenfassung

Auf den nachfolgenden Seiten soll die Arbeit in rückblickender Weise zusammengefasst werden. Die Ausgangssituation sowie das methodische Vorgehen werden anschaulich dargestellt, die Ergebnisse bewertet sowie die Erkenntnisse zusammengefasst. Darauf folgt ein Ausblick auf Potenziale in der Zeitreihenanalyse und der Weiterentwicklung der Auswertealgorithmen.

### 6.1.1 Ausgangssituation

In der Bachelorthesis [Vollert, 2022] wurde bereits die Basis zur Auswertung von Messdaten der ingenieurgeodätischen Bauwerksüberwachung mit Werkzeugen der Zeitreihenanalyse und Integraltransformationen gelegt. Dort wurde die Fast-Fourier-Transformation zur Analyse validiert. Jedoch weist diese einige entscheidende Nachteile auf. Die Zeitinformation geht in der Ergebnisdarstellung verloren, der Analyst hat keine Möglichkeit zu sehen, welche Frequenzen und Amplituden zu welcher Zeit im Signal vorhanden waren. Zudem kann es zu einer Falschberechnung der Amplituden kommen, wenn das zu analysierende Signal nicht konstant über das ganze Analysefenster vorhanden ist. In diesem Fall werden die Amplituden zu niedrig ausgegeben. Zudem setzt die Fast-Fourier-Transformation eine aufwendige, händische Fensterung voraus. Aus diesen Gründen bestand der Bedarf und das persönliche Interesse nach verbesserten Auswertealgorithmen, die vor allem die Zeitinformation als wichtigen Parameter berücksichtigen und darstellen. Motivation und Ansporn zu einer Arbeit zum Thema der Kurzzeit-Fourier-Analyse lieferte zudem der Umstand, dass diese in der Geodäsie, zumindest nach aktueller Quellenlage, kaum Anwendung findet. Die in [Vollert, 2022] behandelte Fast-Fourier-Transformation wird dagegen häufiger zur Auswertung von Zeitreihen in der ingenieurgeodätischen Bauwerksüberwachung genutzt. Die Ausgangssituation stellte der bisher unerprobte Auswertealgorithmus der Gabor-Transformation dar, den es an einer Vielzahl verschiedener simulierter und echter Datensätze zu validieren galt.

### 6.1.2 Methodische Vorgehensweise

Methodisch ist die Validierung der Gabor-Transformation zur Auswertung von Zeitreihen der geodätischen Bauwerksüberwachung dreistufig erfolgt. Im ersten Schritt erfolgte die Anwendung auf simulierte Zeitreihen, um die Reaktion des Verfahrens auf gezielt veränderbare Parameter wie Rauscheinflüsse oder Artefakte in den Daten wie Datenlücken,

Trends und Ähnliches systematisch zu untersuchen. Darauf aufbauend wurde die Methode an kontrolliert erzeugten Realmessdaten getestet, bei denen Frequenz und Amplitude der Schwingung bekannt und reproduzierbar waren. Dies erlaubte eine Überprüfung der Funktionsweise unter praxisnahen, aber definierten Bedingungen. Im dritten Schritt kam die Gabor-Transformation bei der Auswertung von Messdaten realer Überwachungsobjekte zum Einsatz. Durch den Vergleich mit Messdaten und Auswertungen früherer Messkampagnen, deren Ergebnisse signifikant und geprüft ermittelt wurden und somit bekannt waren, konnte die Zuverlässigkeit und Richtigkeit der Ergebnisse überprüft und die grundsätzliche Eignung der Methode für die ingenieurgeodätische Zeitreihenanalyse bestätigt werden.

### 6.1.3 Bewertung der Ergebnisse

Im Rahmen der praktischen Auswertung von Messdaten mit der Gabor-Transformation konnten Ergebnisse erreicht werden, die stets einen Mehrwert zu der Darstellung im Amplitudenspektrum der FFT boten und aus denen zu jeder Zeit ein hoher Informationsgewinn möglich war. Aus einem Großteil der Zeitreihen konnten sehr gute Ergebnisse abgeleitet werden. Bei schwierigen und inkonsistenten Datenbeständen wurden die Grenzen des Auswerteverfahrens aufgezeigt; bei diesen Daten konnte jedoch auch das erprobte Verfahren der Fast-Fourier-Transformation keine verwertbaren Ergebnisse liefern. Das Matlab-Skript, welches für die Auswertung mit der Gabor-Transformation entwickelt wurde, erfuhr über den Verlauf der praktischen Auswertung eine Reihe von weiterführenden Modifikationen und arbeitet sehr effizient. Die Ergebnisse der Untersuchungen sind als höchst erfolgreich anzusehen. Die Gabor-Transformation ist als Analyseverfahren zur Auswertung von Zeitreihen der ingenieurgeodätischen Bauwerksüberwachung signifikant validiert und erprobt worden.

### 6.1.4 Erkenntnisse

Die Erprobung der Auswertung von Zeitreihen in der ingenieurgeodätischen Zeitreihenanalyse mit der Gabor-Transformation ist mit großem Erfolg zu bewerten. Das bisher wenig angewandte Verfahren liefert äußerst interessante Ergebnisse im Vergleich zu Verfahren wie der Fast-Fourier-Transformation und bietet gegenüber dieser einen enormen Mehrwert. Besonders die Berücksichtigung und Darstellung der Zeitinformation, neben dem Wegfallen einer händischen Fensterung, sind wichtige Erkenntnisse und entscheidende Vorteile, die für die Verwendung dieses Analyseverfahrens sprechen. Die wichtigsten Erkenntnisse in Bezug auf die Gabor-Transformation sind bereits ausführlich im Rahmen der [Thesen](#) formuliert worden. Bei allen positiven Aspekten der Gabor-Transformation hat das Verfahren [Grenzen](#), die beachtet werden müssen, wenn qualitativ hochwertige Ergebnisse erreicht werden sollen. Hier ist eine Steuerung vor allem sensorseitig und in Bezug auf den Messaufbau oder in Bezug auf das Analyseskript möglich.

## 6.2 Ausblick

Der Inhalt und die Erkenntnisse dieser Arbeit stellen auf dem Gebiet der Ingenieurgeodäsie bahnbrechende Ergebnisse und Pionierarbeit dar. Das Verfahren kann nun in Folgeuntersuchungen und an weiteren Messobjekten mit verschiedenen Sensoren künftig als Standardverfahren verwendet werden. Jedoch gibt besonders der Umstand der Existenz des Auflösungskompromisses zwischen Zeit- und Frequenzauflösung bei Verwendung der Kurzzeit-Fourier-Transformation Anlass zur weiteren Forschung auf diesem Gebiet.

Eine Möglichkeit, diesem Kompromisszwang entgegenzuwirken, stellt der Übergang von der STFT zu einer Filterbank-Analyse dar. Statt eine mathematische Transformation zu verwenden, wird eine Parallelanordnung von Filtern aufgebaut, deren Bandbreiten und damit Auflösungen flexibel eingestellt werden können. Mit parallel angeordneten Filtern kann die Energieverteilung eines Signals über Zeit und Frequenz ermittelt werden; als Ergebnis erhält man eine dem Spektrogramm der STFT ähnliche Darstellung, kann aber durch die Gestaltung der Kanäle der Filter die Aufteilung der Frequenzachse frei gestalten. Dieser Ansatz findet bereits beispielsweise in der Analyse akustischer Signale, welche eine oftmals sehr hohe Bandbreite an Frequenzen aufweisen, eine breite Verwendung.

Besonders interessant ist außerdem in diesem Zusammenhang die Wavelet-Transformation, welche eine flexible Funktion als Aufbaufunktion, das sogenannte „Wavelet“ zulässt. Der Begriff „Wavelet“ bezeichnet in diesem Zusammenhang Funktionen, die einen lokal wellenartigen Charakter haben und ein Signal gleichzeitig in Frequenz und Ort bestmöglich aufgelöst analysieren können. Diese Eigenschaften besitzt die klassische Fourieranalyse nicht. Die Wavelet-Transformation stellt durch die sog. Multiskalenanalyse einen kompromissbehafteten adaptiven Ansatz dar, durch den eine höhere Auflösung sowohl in der Zeit- als auch in der Frequenzskala erreicht wird. Hierfür verwendet sie kurze Zeitfenster für hohe Frequenzen, was eine gute Zeitauflösung mit sich bringt, und lange Zeitfenster für niedrige Frequenzen, was eine gute Frequenzauflösung mit sich bringt. Durch diese dynamische Anpassung erreicht die Wavelet-Transformation eine bessere Balance zwischen Zeit- und Frequenzauflösung als die Kurzzeit-Fourier-Transformation. Dieser Umstand unterscheidet sie grundlegend von der Fourier-Analyse, die ein festes Zeit-Frequenz-Raster durch ein festes Analysefenster generiert. Die Wavelet-Transformation findet hauptsächlich in der Datenkompression, Bildverarbeitung und im Bereich der Signalcodierung Anwendung. Die Wavelet-Transformation zur Analyse von ingenieurgeodätischen Zeitreihen zu verwenden, stellt einen Zukunftsausblick und Gegenstand zukünftiger Forschungen dar.



# Literaturverzeichnis

[ArduSimple 2025] ARDUSIMPLE: *RTK-Empfänger: simpleRTK2B Serie.* <https://www.ardusimple.de/simplertk2b-receivers/>. Version: 2025. – Produktseite, Onlinequelle: Zugriff am 02. Juni 2025

[Becker et al. 2024] BECKER, Torsten ; HERRMANN, Richard ; HEUMANN, Christian ; PILZ, Stefan ; SANDOR, Viktor ; SCHÄFER, Dominik ; WELLISCH, Ulrich: *Stochastische Risikomodellierung und statistische Methoden: Angewandte Stochastik für die aktuarielle Praxis.* Berlin, Heidelberg : Springer Vieweg, 2024. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-69532-6>. – ISBN 978-3-662-69531-9. – Erschienen am 27. Dezember 2024

[Bosch Mobility Solutions 2025] BOSCH MOBILITY SOLUTIONS: *Bosch MEMS-Sensoren. MEMS (mikro-elektro-mechanisches System) – Sensortechnologie im Chipformat.* <https://www.bosch-mobility-solutions.com/de/loesungen/elektronische-bauelemente/mems-sensoren/>. Version: 2025. – Onlinequelle: Zugriff am 30. Mai 2025

[Bourier 2022] BOURIER, Günther: *Beschreibende Statistik: Praxisorientierte Einführung – Mit Aufgaben und Lösungen.* 14. Wiesbaden : Springer Gabler, 2022. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-658-37021-3>. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-658-37021-3>. – ISBN 978-3-658-37020-6

[Bybbisch94 2024] BYBBISCH94: *Dresden: teilweise eingestürzte Carolabrücke.* <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:20240929.Carolabr%C3%BCckeCollapse.-013.jpg&oldid=970809917>. Version: September 2024. – Bildquelle von Wikimedia Commons, Zugriff am 14. Januar 2025, Attribution: Bybbisch94, CC BY-SA 4.0 <<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>>, via Wikimedia Commons

[Commons 2024] COMMONS, Wikimedia: *File:Dennis Gabor 1971.jpg* — *Wikimedia Commons, the free media repository.* [https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Dennis\\_Gabor\\_1971.jpg&oldid=906018429](https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Dennis_Gabor_1971.jpg&oldid=906018429). Version: 2024. – Onlinequelle: Zugriff am 03. Mai 2025

[Cooley u. Tukey 1965] COOLEY, James W. ; TUKEY, John W.: An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series. In: *Mathematics of Computation* 19 (1965), Nr. 90, 297–301. <http://dx.doi.org/10.1090/S0025-5718-1965-0178586-1>. – DOI 10.1090/S0025-5718-1965-0178586-1

[Demaret et al. 2024] DEMARET, Laurent ; SCHLÜCHTERMANN, Georg ; WIBMER, Michael: *Höhere Mathematik: Eine Brücke zwischen Theorie und Praxis.* Wiesbaden : Springer Vieweg, 2024. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-658-45217-9>. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-658-45217-9>. – ISBN 978-3-658-45216-2

[DIN 18710-1:2010-09 ] Norm DIN 18710-1 . *Ingenieurvermessung – Teil 1: Allgemeines.* – veröffentlicht September 2010

[Elektronik-Kompendium 2025] ELEKTRONIK-KOMPENDIUM: *MEMS – Micro-Electro-Mechanical-Systems*. <https://www.elektronik-kompendium.de/sites/bau/1503041.htm>. Version: 2025. – Onlinequelle: Zugriff am 30. Mai 2025

[Engel et al. 2017] ENGEL, Philipp ; FOPPE, Karl ; KÖSTER, Uwe: Ingenieurgeodätisches Monitoring an der Marienkirche Neubrandenburg. In: *zfv – Zeitschrift für Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement* 142 (2017), Nr. 4, S. 239–244. <http://dx.doi.org/10.12902/zfv-0177-2017>. – DOI 10.12902/zfv-0177-2017

[Engel et al. 2020] ENGEL, Philipp ; FOPPE, Karl ; KÖSTER, Uwe: Ingenieurgeodätisches Monitoring im Internet of Things: Entwicklung und Erprobung autonomer Sensorsysteme. In: WUNDERLICH, Thomas (Hrsg.): *Ingenieurvermessung 2020*. Berlin, Offenbach : Herbert Wichmann Verlag, 2020. – ISBN 978-3-87907-678-9, S. 1–12

[Everett 2024] EVERETT, Tim: *rtkexplorer – Exploring high precision GPS/GNSS with low-cost hardware and software solutions*. <https://rtklibexplorer.wordpress.com/>. Version: 2024. – Blog zur Nutzung von RTKLIB mit kostengünstiger GNSS-Hardware, Onlinequelle: Zugriff am 03. Juni 2025

[Foken u. Mauder 2024] FOKEN, Thomas ; MAUDER, Matthias: *Angewandte Meteorologie: Mikrometeorologische Methoden*. 4. Berlin, Heidelberg : Springer Spektrum, 2024. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-68333-0>. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-68333-0>. – ISBN 978-3-662-68332-3

[Foppe u. Neitzel 2014] FOPPE, Karl ; NEITZEL, Frank: Von der Zufallsgröße zur Trendschätzung im vermittelnden Ausgleichungsmodell – Grundlagen zur Zeitreihenanalyse für Praktiker. In: GEODÄSIE, Geoinformation und Landmanagement e. f. (Hrsg.): *DVW-Seminar 129: Zeitabhängige Messgrößen – Ihre Daten haben (Mehr-)Wert*. Hannover, Deutschland : DVW-Schriftenreihe, Band 74, 2014, S. 91–116

[Gabor 1946] GABOR, Dennis: Theory of Communication. In: *Journal of the Institution of Electrical Engineers - Part III: Radio and Communication Engineering* 93 (1946), Nr. 26, 429–457. <http://dx.doi.org/10.1049/ji-3-2.1946.0074>. – DOI 10.1049/ji-3-2.1946.0074

[Gautherot 1806] GAUTHEROT, Claude: *Joseph Fourier in his Coat of Prefect*. [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Fourier\\_in\\_his\\_coat\\_of\\_prefect.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Fourier_in_his_coat_of_prefect.jpg). Version: 1806. – Public domain image from Wikimedia Commons, Zugriff am 26. März 2025, Attribution: faithful reproduction of two-dimensional public domain works of art in the public Domain of the USA

[Heunecke et al. 2013] HEUNECKE, Otto ; KUHLMANN, Heiner ; WELSCH, Walter ; EICHHORN, Andreas ; NEUNER, Hans ; MÖSER, Michael (Hrsg.) ; MÜLLER, Gerhard (Hrsg.) ; SCHLEMMER, Harald (Hrsg.): *Handbuch Ingenieurgeodäsie - Auswertung geodätischer Überwachungsmessungen*. 2. Auflage. Berlin, Offenbach : Wichmann Verlag im VDE Verlag, 2013. – ISBN 978-3-87907-467-9

[Hoffmann u. Wolff 2014] HOFFMANN, Rüdiger ; WOLFF, Matthias: *Intelligente Signalverarbeitung 1: Signalanalyse*. Berlin, Heidelberg : Springer Vieweg, 2014.

<http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-45323-0>. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-45323-0>. – ISBN 978-3-662-45323-0

[Kalman 1960] KALMAN, Rudolf E.: A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. In: *Transactions of the ASME-Journal of Basic Engineering* 82 (1960), Nr. 1, S. 35–45. <http://dx.doi.org/10.1115/1.3662552>. – DOI 10.1115/1.3662552

[Kalman u. Bucy 1961] KALMAN, Rudolf E. ; BUCY, Richard S.: New Results in Linear Filtering and Prediction Theory. In: *Journal of Basic Engineering* 83 (1961), Nr. 1, S. 95–108. <http://dx.doi.org/10.1115/1.3658902>. – DOI 10.1115/1.3658902

[Kammeyer u. Kroschel 2022] KAMMEYER, Karl-Dirk ; KROSCHEL, Kristian: *Digitale Signalverarbeitung: Filterung und Spektralanalyse mit MATLAB®-Übungen*. 10. Wiesbaden : Springer Vieweg, 2022. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-658-36235-5>. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-658-36235-5>. – ISBN 978-3-658-36234-8

[Kirchengemeinde St. Petri Altentreptow 2022] KIRCHENGEMEINDE ST. PETRI ALTENTREPTOW: *Internetseite der Kirchengemeinde St. Petri Altentreptow mit Barlow und Groß Teetzleben*. [http://www.kirche-altentreptow.de/st\\_petri.htm](http://www.kirche-altentreptow.de/st_petri.htm). Version: 2022. – Online-Ressource

[Kroschel et al. 2011] KROSCHEL, Kristian ; RIGOLL, Gerhard ; SCHULLER, Björn: *Statistische Informationstechnik: Signal- und Mustererkennung, Parameter- und Signalschätzung*. 5. Springer-Verlag, 2011. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-15954-1>. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-15954-1>. – ISBN 978-3-642-15953-4

[Köster et al. 2019] KÖSTER, Uwe ; ENGEL, Philipp ; FOPPE, Karl: Anwendung der Kurzzeit-Fourier-Analyse auf SMD-Schwingungsmessungen an und in historischen Bauwerken. In: *Publikationen der Deutschen Gesellschaft für Photogrammetrie, Fernerkundung und Geoinformation e.V. (DGPF)* Bd. 28. Stuttgart : DGPF, 2019, S. 207–214. – Publiziert im Rahmen der 39. Wissenschaftlich-Technischen Jahrestagung der DGPF

[Leica Geosystems 2004] LEICA GEOSYSTEMS: *GeoCOM Reference Manual Version 1.0*. Heerbrugg, Schweiz, 2004. – Handbuch

[Leica Geosystems 2005] LEICA GEOSYSTEMS: *Leica Nivel210/Nivel220 – Precision inclination sensor for structural monitoring*. Heerbrugg, Schweiz, 2005. [https://leica-geosystems.com/-/media/files/leicageosystems/products/brochures/leica\\_nivel210-220\\_bro.ashx?sc\\_lang=de-de&hash=B93D4003B617AE958EB08D714D3215FF](https://leica-geosystems.com/-/media/files/leicageosystems/products/brochures/leica_nivel210-220_bro.ashx?sc_lang=de-de&hash=B93D4003B617AE958EB08D714D3215FF). – Datenblatt

[Leica Geosystems 2009] LEICA GEOSYSTEMS: *Leica TM30 – Technische Daten*. Heerbrugg, Schweiz, 2009. – Datenblatt

[Leica Geosystems AG 2010] LEICA GEOSYSTEMS AG: *Leica GMX902 Series – Monitoring Receiver (Flyer)*. [https://leica-geosystems.com/-/media/files/leicageosystems/products/flyer/leica\\_gmx902\\_series\\_monitoring\\_fly.ashx?la=de-at&hash=57EE7562576CF8916E3D1619049A5CC3](https://leica-geosystems.com/-/media/files/leicageosystems/products/flyer/leica_gmx902_series_monitoring_fly.ashx?la=de-at&hash=57EE7562576CF8916E3D1619049A5CC3). Version: 2010. – Online-Datenblatt, abgerufen von der Herstellerseite am 05. Juni 2025

[Mertins 2023] MERTINS, Alfred: *Signaltheorie: Grundlagen der Signalbeschreibung, Filterbänke, Wavelets, Zeit-Frequenz-Analyse, Parameter- und Signalschätzung*. 5. Wiesbaden : Springer Vieweg, 2023. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-658-41529-7>. – ISBN 978-3-658-41528-0

[Metz u. Thome 2022] METZ, Reiner ; THOME, Helmut: Zeitreihenanalyse. Version: 3, 2022. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-658-37985-8>. In: BAUR, Nina (Hrsg.) ; BLASIUS, Jörg (Hrsg.): *Handbuch Methoden der empirischen Sozialforschung*. 3. Wiesbaden : Springer VS, 2022. – DOI 10.1007/978-3-658-37985-8. – ISBN 978-3-658-37984-1, Kapitel 50, 801–815

[Neuner u. Foppe 2009] NEUNER, Hans ; FOPPE, Karl: Grundlagen der Zeitreihenanalyse im Zeitbereich. In: GEODÄSIE, Geoinformation und Landmanagement e. f. (Hrsg.): *Zeitabhängige Messgrößen, verborgene Schätzungen in unseren Daten: DVW-Seminar 85*. Kassel, Deutschland : DVW-Schriftenreihe, Band 59, 2009, S. 25–54

[Neusser u. Wagner 2022] NEUSSER, Klaus ; WAGNER, Martin: *Zeitreihenanalyse in den Wirtschaftswissenschaften: Einführung und Grundlagen für den Einstieg in die aktuelle Forschung*. 4. Berlin, Heidelberg : Springer Gabler, 2022. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-64650-2>. – ISBN 978-3-662-64649-6

[Nitschke 2017] NITSCHKE, Martin: *VBG107 Mathematik 2: Material zur Unterstützung der Lehrveranstaltung*. 07. März 2017. – Vorlesungsskript für die Bachelorstudiengänge Geoinformatik sowie Geodäsie und Messtechnik (1. und 2. Fachsemester)

[Nyquist 1928] NYQUIST, Harry: Certain Topics in Telegraph Transmission Theory. In: *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers* 47 (1928), Nr. 2, S. 617–644. <http://dx.doi.org/10.1109/T-AIEE.1928.5055024>. – DOI 10.1109/T-AIEE.1928.5055024

[RTKLIB 2025] RTKLIB: *RTKLIB: An Open Source Program Package for GNSS Positioning*. <https://www.rtklib.com/>. Version: 2025. – Produktseite, Onlinequelle: Zugriff am 02. Juni 2025

[RWTH Aachen University 2025] RWTH AACHEN UNIVERSITY: *phyphox – Physical Phone Experiments*. <https://phyphox.org/de/home-de/>. Version: 2025. – Webseite des Projekts phyphox, Onlinequelle: Zugriff am 30. Mai 2025

[Shannon 1949] SHANNON, Claude E.: Communication in the Presence of Noise. In: *Proceedings of the IRE* 37 (1949), Nr. 1, 10–21. <http://dx.doi.org/10.1109/JRPROC.1949.232969>. – DOI 10.1109/JRPROC.1949.232969

[Shardt u. Weiß 2021] SHARDT, Yuri ; WEISS, Heiko: *Methoden der Statistik und Prozessanalyse: Eine anwendungsorientierte Einführung*. 1. Berlin, Heidelberg : Springer Vieweg, 2021. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-61626-0>. – ISBN 978-3-662-61625-3

[Shumway u. Stoffer 2011] SHUMWAY, Robert H. ; STOFFER, David S.: *Time Series Analysis and Its Applications: With R Examples*. 3. New York : Springer, 2011. <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4419-7865-3>. – ISBN 978-1-4419-7864-6

[Siemens AG 2016] SIEMENS AG: *Wissenschaftler – Geschichte – Persönlichkeiten bei Siemens*. <https://web.archive.org/web/20160405143824/https://www.siemens.com/history/de/persoenlichkeiten/wissenschaftler.htm>. Version: 2016. – Archivierte Version vom 5. April 2016 via Wayback Machine, Zugriff am 03. Mai 2025

[Teschke et al. 2024] TESCHKE, Gerd ; BLANK, Ulrike ; KÖSTER, Uwe ; CHANDRA, Madhu ; HELMERT, Kathleen ; TRACKSDORF, Patrick ; SAUTER, Tanja ; ÇOLAK, Emre ; PATEL, Bhavinkumar ; VYAS, Aastha ; MEYNE, Sascha: Entwicklung von neuen Verfahren zur Überwindung des Störeinflusses von Windenergieanlagen auf Wetterradarsysteme / Institut für Angewandte Forschung, Hochschule Neubrandenburg. Version: March 2024. <http://dx.doi.org/10.2314/KXP:1880841061>. Neubrandenburg, Chemnitz, March 2024 (FKZ 03EE3004A-E). – Abschlussbericht eines Forschungsprojekts

[Thuselt u. Gennrich 2013] THUSELT, Frank ; GENNRICH, Felix P.: *Praktische Mathematik mit MATLAB, Scilab und Octave: für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. Springer Spektrum, 2013. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-25825-1>. – ISBN 978-3-642-25824-4

[Trauth 2022] TRAUTH, Martin H.: *MATLAB®-Rezepte für die Geowissenschaften*. 1. Berlin, Heidelberg : Springer Spektrum, 2022. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-64357-0>. – ISBN 978-3-662-64356-3

[u-blox AG 2024] U-BLOX AG: *u-blox unveils X20, its new revolutionary all-band high-precision GNSS platform*. <https://www.u-blox.com/en/u-blox-unveils-x20-new-revolutionary-all-band-high-precision-gnss-platform>. Version: 2024. – Onlinequelle: Zugriff am 30. Mai 2025

[u-blox AG 2025] U-BLOX AG: *ZED-F9P Module*. <https://www.u-blox.com/en/product/zed-f9p-module>. Version: 2025. – Onlinequelle: Zugriff am 30. Mai 2025

[Vollert 2022] VOLLERT, Dennis: *Schwingungsanalyse an der St.-Petri-Kirche Altentreptow*, Hochschule Neubrandenburg, Bachelorarbeit, 2022. <http://nbn-resolving.de/urn/resolver.pl?urn=urn:nbn:de:gbv:519-thesis2022-0280-1>. – URN urn:nbn:de:gbv:519-thesis2022-0280-1. – Unveröffentlicht

[Wamsiedler 2011] WAMSIEDLER, Sebastian: *Die Glocken von St. Petri zu Altentreptow*. <http://www.wamsiedler.de/die-glocken-von-st-petri-zu-altentreptow/>. Version: 2011. – Online-Ressource, veröffentlicht am 27. September 2011

[Werner 2009] WERNER, Martin: *Digitale Signalverarbeitung mit MATLAB®*. Wiesbaden : Vieweg+Teubner Verlag, 2009. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-8348-9243-0>. – ISBN 978-3-8348-0457-0

[Whittaker 1935] WHITTAKER, John M.: *Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics.* Bd. 33: *Interpolatory Function Theory.* Cambridge : Cambridge University Press, 1935. – 107 S.