



Hochschule Neubrandenburg
University of Applied Sciences

Hochschule Neubrandenburg

Studiengang Vermessungswesen

**Deformationsanalyse mittels aus Punktwolken
abgeleiteten Ebenen**

Bachelorarbeit

vorgelegt von: *Doreen Schleuder*

Zum Erlangen des akademischen Grades

„Bachelor of Engineering“ (B. Eng.)

URN: urn:nbn:de:gbv:519-thesis2010-0488-8

Erstprüfer: Prof. Dr. – Ing. Karl Foppe

Zweitprüfer: Dipl. – Ing. Martin Kiskemper

Bearbeitungszeitraum: 21. Juli bis 17. September 2010

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, die vorliegende Bachelorarbeit ohne Hilfe Dritter und nur mit den angegebenen Quellen und Hilfsmitteln angefertigt zu haben. Alle Stellen, die aus den Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht worden. Diese Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

Neubrandenburg, den

Unterschrift

Danksagung

Für die Unterstützung während der Abfassung meiner Bachelor-Arbeit an der Hochschule Neubrandenburg möchte ich mich bei allen bedanken, die mir mit Rat und Tat zu Seite standen.

Die in dieser Bachelor-Arbeit entwickelten Ideen und gezeigten Ergebnisse wurden in Zusammenarbeit mit Herrn Prof. Dr. – Ing. Karl Foppe geschaffen. Für die Themenstellung, sein Engagement und seine investierte Zeit gilt ihm daher mein größter Dank.

Herrn Dipl. – Ing. Martin Kiskemper danke ich besonders für seine fachliche Betreuung. Er stand mir stets hilfreich zur Seite.

Weiterhin danke ich Herrn Dr. rer. nat. Martin Nitschke. Er hat mir durch seine tatkräftige Unterstützung und mit seinen guten Ideen bei der Programmierung sehr geholfen.

Kurzfassung

Mittels Scanverfahren lassen sich eine große Anzahl von Messpunkten innerhalb kürzester Zeit erfassen. Man spricht dann von Punktwolken. Der Einsatz dieses Verfahrens kann beispielsweise bei Fassaden oder anderen ebenen Flächen von Interesse sein, die in gewisser Weise von Deformationen bedroht sind und eine Überwachung erfordern.

Die Schwierigkeit besteht darin, dass bei wiederholter Messung nicht identische Objektpunkte gemessen werden. Diese lassen sich folglich auch nicht miteinander vergleichen. Deshalb erfolgt hier die Rückführung auf die Ebene, da sich aus den Punktwolken geometrische Primitive ableiten lassen. Als mathematische Grundlage dient die Hessesche Normalform, mit deren Hilfe sich die Ebene eindeutig beschreiben lässt. Sie liefert die Bedingungsgleichungen für die anschließend notwendige Ausgleichsrechnung nach dem Allgemeinfeld, dem Gauß-Helmert-Modell.

Für die Programmierung des Ausgleichsalgorithmus wird die Software MATLAB verwendet. Der Versuchsaufbau besteht aus einer simulierten Ebene und der Totalstation des Trimble S6. Mit der Scanoption wird die Ebene rasterförmig gescannt. Unterschiedliche Rasterweiten werden für die Ausgleichung verwendet und im Vergleich zu der Referenzepoche, mit geringer Rasterweite, auf Signifikanz geprüft. Bestimmt wird, wie viele Punkte nötig sind, um kleinste Bewegungen festzustellen und mögliche Folgen abzuleiten.

Abstract

Using methods of scan gives the opportunity of collecting quickly a huge amount of measuring points. In that case you speak of point clouds. The assignment of that procedure might be interesting to use for i. e. claddings or other surfaces which are threatened by deformations and are in need to be monitored.

While re-enacting the measurement it is challenging to get identical object points, therefore they are hardly comparable. Due to that reason the refeed occurs to that level the point clouds can be diverted. The Hessian normal form conduces as mathematics with which it is possible to describe the level precisely. That form delivers the equation of condition for the following necessary balance calculation after the overall case, the model of Gauß-Helmert. The software used for programming the balance algorithm is called MATLAB.

For the test preparation one level has been simulated and been measured by the scanoption of the Trimble S6.

Different screen widths are used for the compensation and are tested for significance in comparison with a reference epoch with a lower screen width. It is defined how many points are needed to assess elemental movements and therefore to convey possible outcomes.

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung	3
1.1 Motivation	3
1.2 Ziel der Bachelorarbeit.....	4
2. Grundlagen.....	6
2.1 Deformationsanalyse	6
2.2 Gerätebeschreibung	8
2.2.1 Genauigkeiten.....	11
2.3 Mögliche Fehlerquellen.....	12
2.4 Messverfahren	13
2.4.1 Elektrooptische Streckenmessverfahren	13
2.4.2 Berührungslose Messverfahren	15
3. Messungsaufbau	17
3.1 Vorbereitende Überlegungen.....	17
3.2 Durchführung der Messung der Referenzepoche	19
3.3 Datenexport und Datenformate	21
4. Mathematische Grundlagen.....	22
4.1 Die Allgemeine Ebene	22
4.2 Die Hessesche Ebenengleichung.....	25
4.3 Berechnung von Winkeln zwischen Ebenen.....	27
5. Varianzfortpflanzungsgesetz	28
5.1 Allgemeines	28
5.2 Anwendung des Varianzfortpflanzungsgesetzes im Rahmen der Bachelor-Arbeit	28
6. Ausgleichsrechnung	30
6.1 Grundlagen.....	30
6.2 Parameterschätzung.....	31
6.3 Modellbildung für den Allgemeinfeld der Ausgleichung.....	33
6.3.1 Funktionales Modell.....	33
6.3.2 Stochastisches Modell	34
6.3.3 Ausgleichungsalgorithmus.....	35

7. Statistischer Test	37
7. 1 Statistische Testverfahren	37
7.2 Empirische und theoretische Varianz	41
7.3 Tests quadratischer Größen	42
7.3.1 Test einer empirischen Varianz gegen eine theoretische	42
7.3.2 Test zweier Standardabweichungen	43
7.3.3 Test einer Differenz zwischen zwei Zufallsgrößen.....	43
8. MATLAB	46
8.1 Beschreibung der verwendeten Software	46
8.2 Programmierstrategien	48
8.3 Umsetzung des Ausgleichsalgorithmus	51
9. Präsentation der Ergebnisse	58
9.1 Genauigkeiten der Ebenenparameter der einzelnen Epochen	58
9.2 Prüfen der Neigungsänderung auf Signifikanz	66
9.3 Vergleiche zu anderen Programmen	70
10. Resümee	72
Literaturverzeichnis.....	74
Abbildungsverzeichnis	76
Tabellenverzeichnis	77
Formelverzeichnis	77
Anhang	78
Anhang A – Messprotokoll.....	78
Anhang B –Tabelle der <i>F</i> -Verteilung	
Tabelle der 'Standard - Normalverteilung'	78
Anhang C – Bilder zu Cyclone, Geomagic, Cremer	78
Anhang D – Vergleiche zwischen Referenz- und Folgeepochen.....	
unterschiedlicher Rasterweiten (Tabellen, Bilder).....	78
Anhang E – Inhalt der CD.....	78

1. Einführung

1.1 Motivation

Durch die rasante Entwicklung der Technik gehören heutzutage das terrestrische Laserscanning und die reflektorlose Entfernungsmessung mit modernen (Robot-) Tachymetern zu den gängigen Messverfahren in der Geodäsie und der Ingenieurvermessung. Auf diese Weise lassen sich schnell und engmaschig große Objekte abtasten. Die im Ergebnis entstehenden Punktwolken sind von hoher Dichte. Dabei handelt es sich jedoch nicht um diskrete, präzise definierte Punkte, wie sie beispielsweise bei der Deformationsanalyse vorhanden sein müssen. Hier lassen sich bei wiederholter Messung Punktidentitäten nur aufwendig definieren. Dies erschwert den Vergleich zweier Messepochen erheblich.

Wenn man sich die Bilder von Nachterstedt in Sachsen - Anhalt vor Augen hält, wo vor einem Jahr Häuser in einen gefluteten Braunkohletagebau stürzten und drei Menschen in den Tod rissen (Quelle: www.stern.de/panorama/....html, 2010) oder andere erdrutschgefährdete Gebiete im Bergbaubereich, aber auch in Städten wie Köln (der Einsturz des Kölner Stadtarchivs), so ist es hier von großem Vorteil, dauerhafte Überwachungssysteme zu installieren. Könnten solche Objekte permanent beobachtet werden und eine zeitnahe Auswertung der Daten erfolgen, so wären Einstürze solcher Art zu verhindern. Zwar sind solche Monitoringssysteme schon im Einsatz, jedoch soll im Rahmen der Bachelor-Arbeit der Einsatz von Scannern betrachtet werden. Durch die Vorgabe einer Rasterdichte sollen beispielsweise die Fassaden von gefährdeten Gebäuden gescannt werden.

Aufgrund dessen soll hier im Rahmen der Bachelorarbeit eine Deformationsanalyse mittels aus Punktwolken abgeleiteten Ebenen erfolgen. Innerhalb einer Epoche sind die erreichbaren Genauigkeiten zu dokumentieren und im Vergleich zu weiteren Epochen, unter verschiedenen Aufnahmebedingungen, die sich daraus ergebenden minimal signifikanten Bewegungen, aufzudecken.

Eine solche Aufgabe bedarf einer Ausgleichung, um aus der Punktwolke eine Ebene zu erhalten, die diese bestmöglich beschreibt. Die Ausgleichung soll dabei als „Allgemeinfall der Ausgleichsrechnung“ (Gauß-Helmert-Modell) erfolgen. Dazu

sollen im Nachfolgenden die theoretischen Grundlagen aufgearbeitet und geeignete Teststatistiken bereitgestellt werden.

1.2 Ziel der Bachelorarbeit

Aus den eben beschriebenen Punktwolken sollen Flächen mit ihren definierenden Parametern abgeleitet werden. Anschließend werden die erreichten Genauigkeiten in den Testmessungen für jede Fläche unter Berücksichtigung der Rasterdichte und des Auftreffwinkels des Messstrahls verglichen. Unter Betrachtung der Theorie zur Deformationsanalyse sollen nach geeigneten Verfahren die zu vertestenden Größen ermittelt werden. Dabei stellt sich die Frage, was überhaupt die kleinste mögliche Bewegung oder Veränderung ist, die aufgedeckt werden kann. Möglicherweise können Rotation und Translation der Fläche in statistischen Tests geprüft werden oder Transformationsparameter von Punktgruppen. Nach der Ausgleichung können Neigungsänderungen gegenüber der Referenzepoche über die Winkel zwischen den Normalvektoren angegeben werden. Mit Hilfe der Kofaktormatrix lassen sich die Genauigkeiten der Neigungsänderungen bestimmen und testen, ab wann diese signifikant sind. Unter Angabe der erreichten Genauigkeiten aus den Testmessungen sollen Beurteilungen und Wertungen erzielt werden.

Weiterhin stellt sich die Frage, was passiert, wenn man weniger Punkte beziehungsweise größere Punktabstände für das Raster wählt. Welche Auswirkungen hat das auf die Ebenenparameter und deren Genauigkeiten. Diese lassen sich für die verschiedenen Ebenenstellungen bestimmen. Die Ausgleichung wird mit der Software MATLAB programmiert.

In den folgenden Kapiteln wird die notwendige Theorie zu der Thematik aufgearbeitet und die Praxis, sprich der Messungsaufbau und die Messung selbst beschrieben. Das zweite Kapitel startet mit der Deformationsanalyse als Einstieg in die Problematik. Zusätzlich wird das verwendete Messinstrument erläutert und auf seine Messgenauigkeit eingegangen. Es werden mögliche Fehlerquellen betrachtet sowie eine Übersicht über die verschiedenen Streckenmessverfahren gegeben.

Das dritte Kapitel beschäftigt sich mit dem Messungsaufbau. Beginnend mit Vorüberlegungen für den Versuchsaufbau über die einzelnen Testmessungen bis hin zum Auslesen der Dateien sollen hier die verschiedenen Vorgänge beschrieben werden.

Das vierte Kapitel beschäftigt sich ausschließlich mit den mathematischen Grundlagen, die für die folgenden Kapitel wichtige Voraussetzungen sind. So werden die vielen Möglichkeiten der Beschreibung einer Ebene bis hin zur Hesseschen Normalform erläutert. Im fünften erfolgt ein kurzer Überblick in das Varianzfortpflanzungsgesetz.

Die Ausgleichsrechnung beherrscht das sechste Kapitel. Es enthält wichtige Aspekte der Parameterschätzung sowie den Ausgleichsalgorithmus nach dem Gauß-Helmert-Modell.

Auf die statistischen Tests wird im siebenten Kapitel eingegangen. Hier werden die verschiedenen statistischen Vergleichsverfahren zunächst theoretisch behandelt. Die Anwendung auf die Messergebnisse erfolgt mit der Präsentation der Ergebnisse im neunten Kapitel.

Das Programmpaket MATLAB soll dem Leser im achten Kapitel näher gebracht werden. Neben der Beschreibung der Software werden Auszüge aus dem Ausgleichsalgorithmus die Programmierstrategien darlegen.

Die Ergebnisse und wichtige Erkenntnisse werden im neunten Kapitel präsentiert und diskutiert. Rückschlüsse, Schlussfolgerungen sowie Vergleiche verschiedener Konstellationen sind enthalten. Die erreichten Genauigkeiten der Parameter werden bewertet und beurteilt. Abschließend werden Vergleiche zu anderen zur Verfügung stehenden Auswerteprogrammen angestellt.

2. Grundlagen

2.1 Deformationsanalyse

Mit wachsender Automatisierung der geodätischen Messtechnik und der Messverfahren in den letzten Jahren gab es Fortschritte in der Geräteentwicklung. Angestrebt wird heutzutage, möglichst riesige Mengen an Daten innerhalb kürzester Zeit zu erfassen. Damit erhöht sich aber auch der Aufwand zur Auswertung dieser Daten. Zurzeit gibt es nur wenige, aber aufwendige und zeitintensive Auswertesoftware auf dem Markt, um aus riesigen Punktwolken wieder geometrische Primitive wie Ebenen, Zylinder, Kugeln usw. abzuleiten.

Wenn von Deformation oder von Deformationsanalyse gesprochen wird, so sind zumeist die geodätischen Überwachungsmessungen zur Erfassung geometrischer Veränderungen eines Messobjektes gemeint. Es sind Bewegungen in Form von Verdrehung (Rotation), Verschiebung (Translation) oder Neigung (Kippung) des jeweiligen Objektes zu ermitteln. Anhand der Ergebnisse können Rückschlüsse auf statische Belastungen am Messobjekt gezogen werden. Als Ursache dafür können ableitend Aussagen über Grundwasserabsenkungen, Baugrundentlastungen oder Baugrundbelastungen getroffen werden. Doch, was sagt diese geometrische Veränderung des Bauwerkteils letztendlich aus, und mit welcher Genauigkeit beziehungsweise Wahrscheinlichkeit oder Zuverlässigkeit kann die Veränderung bestimmt werden? Das Ergebnis der Analyse soll die Standfestigkeit beziehungsweise Funktionssicherheit des fertigen Bauwerks liefern. Deformationsanalyse und Ausgleichsrechnung sowie Statistik und Datenverarbeitung hängen eng zusammen.

Vor jeder Messung sind dementsprechend die zu erwartenden Genauigkeiten abzuschätzen. Technisch und wirtschaftlich effiziente Messverfahren und Messsensoren müssen ausgewählt werden. Im Allgemeinen handelt es sich bei den Beobachtungsverfahren um konventionelle Verfahren, wie terrestrische Tachymetrie oder spezielle geodätische Messverfahren, wie photogrammetrische oder automatisch terrestrisch registrierende Verfahren.

Die Messungen unterliegen Fehlereinflüssen. Um diese möglichst gering zu halten, ist die Erfassung von störenden Einflussgrößen, wie zum Beispiel Temperatur, Luftdruck und Luftfeuchte notwendig. Aufgrund technisch-mechanischer Unzulänglichkeiten und der Unvollkommenheit der menschlichen Sinne ist eine fehlerfreie Messung ebenfalls nicht möglich. Die Bereitstellung der notwendigen Softwareprogramme zur Datenaufzeichnung, als auch die gleichzeitige Registrierung, sowie der Zusammenführung aller Fehlereinflüsse, muss daher gewährleistet sein.

Überwachungsmessungen sollen im Allgemeinen den Nachweis eines abweichenden Verhaltens ausgewählter Messpunkte gegenüber der zu erwartenden Veränderung liefern. Um zeitlich veränderliche Deformationen aufzudecken, ist über die zu beobachteten Objektpunkte traditionell ein geodätisches Netz zu legen. Die identischen Punkte sind epochenweise zu beobachten und zu messen. Es gibt die Möglichkeit des Absoluten Überwachungsnetzes, das heißt, die als Referenzpunkte verwendeten Objektpunkte werden als nicht veränderliche Punkte eingeführt. Eine weitere Möglichkeit bietet das relative Überwachungsnetz zur Erfassung der Änderungen der inneren Geometrie des Messobjektes. Die Schwierigkeit der Auswertung von Deformationsanalysen besteht darin, das Messrauschen vom Signal zu trennen und der damit verbundenen Signifikanz der Deformation. Dies führt zu statistischen Tests, in die oft mit zu optimistisch geschätzten Genauigkeiten herangegangen wird. Verschiedene Auswertemodelle lassen sich in Abhängigkeit der zu schätzenden Parameter in folgende Gruppen einteilen:

- *Kongruenzmodell*
- *Kinematisches Modell*
- *Statisches Modell*
- *Dynamisches Modell.*

Das Kongruenzmodell erfasst lediglich die veränderliche Geometrie eines Objektes. Es wird deshalb in Fachbüchern auch Geometrisches Modell genannt. Das zweite Modell erfasst zeitliche Veränderungen der Geometrie des Objektes, während das Statische und das Dynamische Modell den funktionalen Zusammenhang zwischen der Ursache, möglicherweise einer wirkenden Kraft, und der Verände-

rung des Modells parametrisieren. Beim Dynamischen Modell fließen die Einflussfaktoren wie Zeit, Kraft und Geometrie kombiniert in die Modellierung. In Abhängigkeit von den zur Verfügung stehenden Informationen, wie Kräfte, Geschwindigkeiten etc., und der Wiederholungsrate der Epochenmessungen, erfolgt die Wahl des Auswertemodells. Die unterschiedlichen Modelle können nun mit den verschiedenen Überwachungsnetzen kombiniert werden. Das Geometrische Modell zusammen mit dem absoluten Netz ermöglicht beispielsweise die Verknüpfung der Überwachungsmessungen mit dem Referenzpunktfeld, sowie die Schätzung des absoluten Zustands- und Verschiebungsvektors des Objekts. Mit der Wahl eines relativen Überwachungsnetzes besteht uneingeschränkte Schätzbarkeit von weiteren Deformationsfunktionalen. Relative Überwachungsnetze in Verbindung mit geometrischer Deformationsanalyse erlauben nur die Schätzung relativer Deformationsparameter. Für die Deformationsanalyse der Ebene wird das Kongruenzmodell zu Grunde gelegt, da hier keine zeitlichen und kräftewirkenden Faktoren einbezogen werden.

2.2 Gerätebeschreibung

Zur dreidimensionalen Objekterfassung können Laserscanner unterschiedlicher Genauigkeiten von 0,5 m bis weniger als 0,01 mm eingesetzt werden. Anstelle von Standardlaserscannern, wie zum Beispiel der Leica- Scan- Station, werden auch moderne Tachymeter mit integrierter Scanoption verwendet. Die meisten Ingenieurbüros sind mit solchen Robotic-Totalstationen ausgestattet. Bei der Trimble S6 HP Totalstation, die für die im Rahmen der Bachelorarbeit notwendigen Messungen eingesetzt wurde, handelt es sich um ein entsprechend ausgestattetes Tachymeter. Die Abkürzung HP steht für *high precision*, sowohl in der Richtungsmessung (1") als auch in der Streckenmessung (1mm + 1ppm).

Das Entfernungsmesssystem erlaubt die Messung zu Prismen als auch zu passiven Zielen. Die Trimble S6 Totalstation ist ausgestattet mit einem Direct Reflex (DR) für die reflektorlose Entfernungsmessung unter Verwendung eines Lasers. Da bei der prismenlosen Entfernungsmessung nur ein minimal kleiner Anteil der ausgesandten Energie zurück kommt, ist es günstig, Laserlichtquellen einzusetzen, die eine hohe Energiedichte haben und deren austretendes Licht gut gebündelt werden kann. Das S6 besitzt eine Laserdiode, deren Intensität nur für die

entsprechenden Messmodi (Prismen- oder DR-Modus) umgeschaltet wird. Die Unterscheidung in Klassen erfolgt nach Laserklasse 1 für den Prismenmodus und Laserklasse 2 für den Pointer und DR-Modus. Die Distanzen werden mittels Phasenvergleichsverfahren, das der DR-Standard-Technologie zu Grunde liegt, bestimmt. Auf das Verfahren wird in Kapitel 2.4 genauer eingegangen.

Für die Erfassung der Punktwolke der Ebene wird das Programm 'Oberflächen-scan' der Trimble S6 Totalstation gewählt. Bei dem Programm handelt es sich um einen DR- Messvorgang. Die Messung wird entlang einer vordefinierten Scanfläche mit einer vorgegebenen Rastergröße durchgeführt. Für die Definition der Scanfläche stehen drei Möglichkeiten zur Auswahl. Erste Möglichkeit bietet die Methode 'Intervall Hz V'. Diese wird bei komplexen Oberflächen eingesetzt, wenn keine rechtwinklige Ebene zur Einschätzung der Scanfläche verwendet werden kann (siehe Abbildung 1).

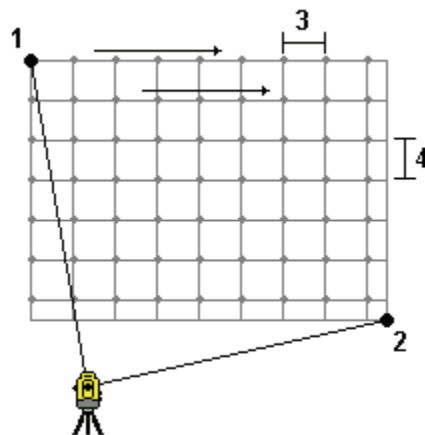


Abbildung 1: 'Intervall Hz V' (Trimble Geomatics and Engineering Division 2005)

Die zweite Methode ist die 'Rechtwinklige Ebene'. Wenn es sich bei der benötigten ebenen Oberfläche um ein rechtwinkliges Gitterintervall handelt, wird auf Basis dieser Methode die Dimension der Ebene festgelegt. Über die in Abbildung 2 dargestellten Punkte 1 bis 3 bestimmt der Trimble Survey Controller den Winkel

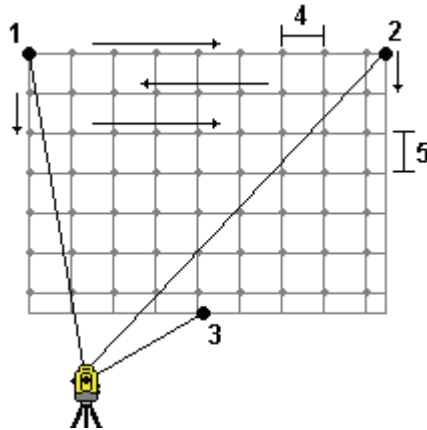


Abbildung 2: Rechtwinklige Ebene (Trimble Geomatics and Engineering Division 2005)

der Ebene und verwendet diesen und die Rastergröße, um einzuschätzen, wie weit das Instrument zum nachfolgenden Punkt gedreht werden muss. 'Linie und Offset' ist die dritte Methode zur Festlegung der Ebene. Hier wird zunächst eine Mittellinie definiert. Die Offsets sind nach beiden Seiten hin gleich groß (siehe Abbildung 3). Unter Verwendung der horizontalen rechtwinkligen Offsets zur Mittellinie wird die Oberfläche definiert.

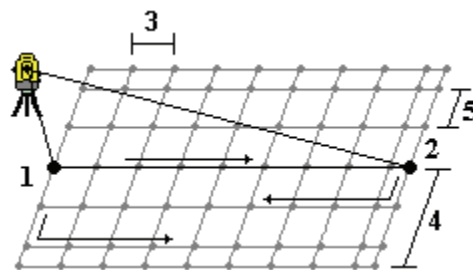


Abbildung 3: Linie und Offset (Trimble Geomatics and Engineering Division 2005)

Für die Messung der Ebene im Rahmen der Bachelorarbeit wurde die zweite Methode gewählt. Mit einem Raster von 2 cm x 2 cm (entspricht 60 x 59 Zeilen und Spalten) errechnet die Trimble CU eine zu messende Punktwolke von 3540 Einzelpunkten und eine Dauer von 3h 20m.

Die Vorteile des Scannens liegen darin, dass die zu messenden Objekte berührungslos erfasst werden. Es besteht keine Notwendigkeit, die gefährdeten Gebiete zu betreten, um die Zielpunkte mit Reflektoren oder Reflektorfolien zu markieren. Des Weiteren ist eine wesentlich schnellere Erfassung großer Punktmengen

möglich als mit konventionellen Messverfahren. Nicht oder nur schlecht reflektierende Oberflächen können sich als nachteilig auswirken. Deshalb sollte es sich um reflexionsfähige Oberflächen handeln, die das Laserlicht ausreichend zurückwerfen.

Direkt vor der Messung ist keine Instrumentenprüfung erfolgt, da das Instrument in regelmäßigen Abständen (halbjährlich in den Semesterferien) justiert wird. Das heißt, dass die Nullpunkte der Neigungssensoren und die Achsfehler (Zielachs-, Kippachs- und Höhenindexfehler) mit den internen Justier Routinen neu bestimmt werden. Zudem wird das Instrument nur selten und nur bei höheren Semestern im Fach Ingenieurvermessung eingesetzt.

Der Bedieneinheit des S6 (die sogenannte TCU - Trimble Controller Unit) lässt sich besonders einfach aufgrund der Windowsoberfläche handhaben. Ein strukturierter und logischer Programmaufbau kann über den Touchscreen und ein paar zusätzlichen Tasten bedient werden.

2.2.1 Genauigkeiten

Für die Bestimmung der Standardabweichungen der Koordinaten über das Varianzfortpflanzungsgesetz spielt die Betrachtung der Genauigkeiten des Instruments eine große Rolle. Die Angaben der Gerätehersteller für die Richtungsmessgenauigkeit s_r (Standardabweichung gemäß DIN 18723)¹ belaufen sich auf 1" (0,3 mgon). Die Streckenmessgenauigkeit s_D im Prismenmodus für die Standardmessung wird mit 1 mm + 1 ppm angegeben. Im DR-Modus beläuft sich die Streckenmessgenauigkeit auf 3 mm + 2 ppm nach dem Phasenvergleichsverfahren. Die Messzeit im DR-Modus für die Standardmessung beträgt 3 bis 15 Sekunden. Nimmt man die zeitliche Angabe von 3h 20m, die das S6 für das Scanverfahren benötigt, so entspricht das einer Gesamtmessdauer pro Punkt plus Anfahren des Punktes von 3,4 Sekunden.

¹ DIN 18723 – Feldverfahren zur Genauigkeitsuntersuchung geodätischer Instrumente

2.3 Mögliche Fehlerquellen

Eingangs wurde bereits von technisch-mechanischen Unzulänglichkeiten und von der Unvollkommenheit der menschlichen Sinne gesprochen. In Bezug auf die Beobachtungen treten daraufhin zufällige Fehler auf. Weitestgehend als Abweichung ausgeschlossen werden können grobe Fehler allein durch Konzentration des Beobachters. Systematische Abweichungen lassen sich nur schwer erfassen. Beispielsweise kann es sich dabei um Nichtberücksichtigung von Kalibrierparametern handeln. Die Kalibrierparameter werden an die Rohdaten als Korrekturen angebracht. Genauso lässt sich eine Korrektur für atmosphärische Einflüsse bei der Streckenmessung durch Eingabe von Temperatur und Luftdruck anbringen.

Für die reflektorlose Entfernungsmessung werden keine Zielzeichen benötigt, die den Messstrahl reflektieren. Die Streckenmessgenauigkeit und die Reichweite sind abhängig von verschiedenen Faktoren bezüglich des Messobjektes. Unter anderem spielt die Beschaffenheit des Objekts eine große Rolle. Dazu gehören das Material, die Rauheit und die Farbe. Hinzu kommt die Oberflächenstruktur, die die Reflektionseigenschaft des Objekts bestimmt. Der Auftreffwinkel des Messstrahls sollte möglichst rechtwinklig zur Fläche sein. Weiterhin zu berücksichtigen sind äußere Störungen, die das Signal absorbieren und streuen können, zum Beispiel Nebel und starke Sonneneinstrahlung. Die Intensität des reflektierten Signals und der Empfängerempfindlichkeit haben auch einen Einfluss auf die Streckenmessgenauigkeit. Aufgrund der genannten Einflüsse kann das Signal um 10 - 100 % abgeschwächt werden. Die Streckenmessgenauigkeit ist aber von hoher Relevanz für die Punktgenauigkeit.

Eine weitere mögliche Fehlerquelle liegt in dem Durchmesser des Messstrahls. Dabei gilt, je kleiner der Durchmesser des Messstrahls ist, desto eindeutiger ist der Messpunkt. Dieser Einfluss bei Verwendung eines Lasers ist die Aufweitung der Strahlungsquelle mit zunehmender Distanz von der Entfernungsmesseinheit und wird Strahldivergenz (siehe Abbildung 4) genannt. Dadurch wird eine Vergrößerung des Durchmessers des Messpunktes hervorgerufen, deren Einfluss sich bei ebenen Oberflächen allerdings nur gering auf die Messgenauigkeit auswirkt. Der abzutastende Bereich wird lediglich vergrößert.

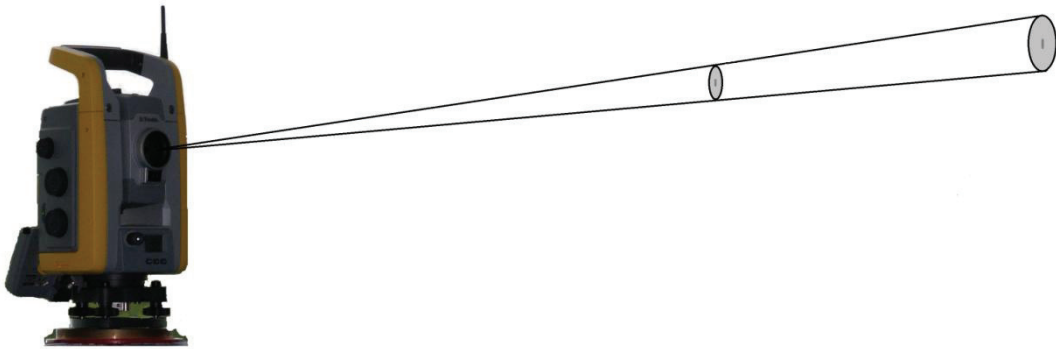


Abbildung 4: Strahldivergenz

Die Folge der Strahldivergenz beim Messen von Ecken und Kanten ist jedoch, dass keine Zuverlässigkeit des Messergebnisses mehr gegeben ist. Der Hersteller gibt die Strahldivergenz für das Trimble S6 in der Horizontalen mit 2cm/50m und in der Vertikalen mit 2cm/50m an. Das heißt, dass die anzumessende Fläche mindestens die Ausdehnung des Strahldurchmessers haben sollte und eben sein muss.

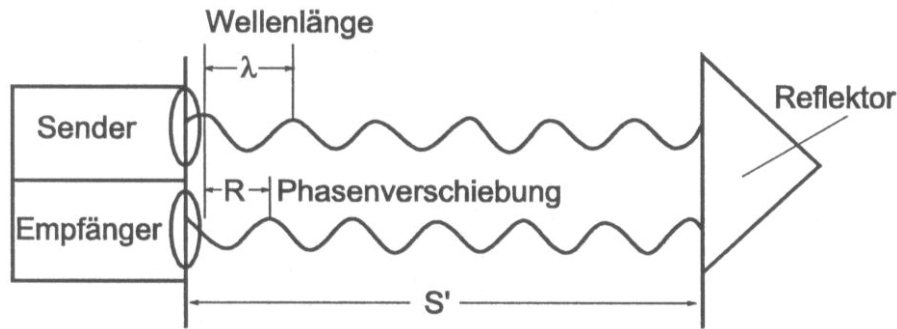
Für die Messung im Rahmen der Bachelor-Arbeit kann dieser Aspekt außer Acht gelassen werden. Es treten nur kurze Entfernungen von etwa 6 m zwischen Instrument und Ebene auf. Ein instabiler Instrumentenstandpunkt wird ebenfalls ausgeschlossen aufgrund der benutzten Messpfeiler im Raum 318.

2.4 Messverfahren

2.4.1 Elektrooptische Streckenmessverfahren

Hier soll eine kurze Übersicht über die verschiedenen Messverfahren gegeben werden. Die Elektronische Streckenmessung funktioniert nach dem Prinzip einer vom Sender emittierten Welle, die von einem Messobjekt zu einem Empfänger reflektiert und dort erfasst wird. In der geodätischen Messtechnik haben sich zwei Verfahren durchgesetzt, zum einen das Phasenvergleichsverfahren und zum anderen das Impulsverfahren.

Bei der Phasenmessung oder auch Phasenverschiebung sind die Anzahl der Perioden und die Phasenverschiebung als Restanteil der modulierten Welle zu be-



**Abbildung 5: Prinzip des Phasenvergleichsverfahrens (Möser u.a.:
Handbuch Ingenieurgeodäsie – Grundlagen, 2000)**

stimmen. Der kontinuierlich ausgestrahlten Trägerwelle (siehe Abbildung 5) wird eine Messwelle aufmoduliert. Diese gelangt zum Reflektor. Dort wird die Schwingung versetzt zum Empfänger zurück geschickt und ausgewertet. Es wird also lediglich moduliertes Licht zur Messung einer Phasenverschiebung benutzt, aus der sich nach Auflösung einer Phasenmehrdeutigkeit Strecken ergeben.

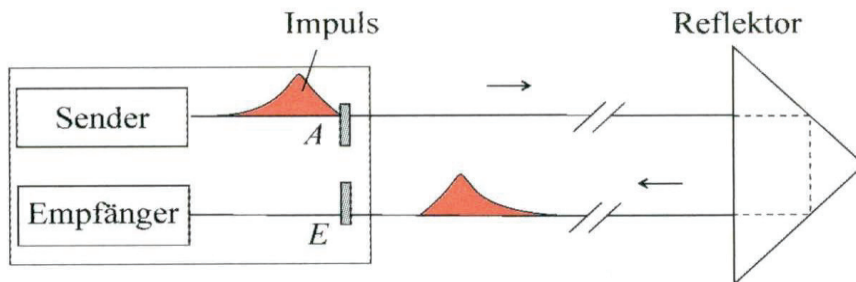


Abbildung 6: Prinzip des Impulsverfahrens (Deumlich und Staiger 2002)

Beim Impulsverfahren (siehe Abbildung 6) wird ein Messimpuls von einem Sender erzeugt und ausgesandt. Die Laufzeit des Lichtimpulses wird gemessen. Die Strecke berechnet sich aus der Geschwindigkeit und der benötigten Zeit des Signals zwischen Standpunkt und Messobjekt. Da das Signal Hin- und Rückweg durchläuft, muss die berechnete Distanz halbiert werden. Mit dem Verfahren können die größten Entfernungen erzielt werden. Der Impuls kann um ein Vielfaches stärker sein, als die bei der Phasenvergleichsmessung aufgewandte Energie. Deshalb lassen sich mit dem Verfahren größere Reichweiten erzielen, mit und ohne Prismen. Das herkömmliche Laufzeitverfahren ist in der Regel ungenauer als das Phasenvergleichsverfahren. Trimble hat ein Signalverarbeitungs-

verfahren patentieren lassen, mit dem sich die Verfahren einander in ihren Genauigkeiten angleichen. Die Differenz zwischen beiden Verfahren bei der reflektorlosen Messung liegt bei $3 \text{ mm} + 3 \text{ ppm}$ und $3 \text{ mm} + 2 \text{ ppm}$. Bei einer Strecke von 100 m entspricht dies einer Differenz von 0,1 mm. Bei größeren Entfernungen ist das Laufzeitverfahren im Allgemeinen wesentlich schneller als das Phasenvergleichsverfahren, da sich bei Letzterem in der Regel die Messzeit mit zunehmender Entfernung erhöht. Die Messzeiten für DR-Phasenvergleichs-EDMs werden oft als Messzeiten für kurze Distanzen angegeben, plus Zuschläge für weitere Entfernungsbereiche. Die Messzeit ist in Abhängigkeit sowohl von der Entfernung zwischen Objekt und Instrument als auch von der Oberfläche des Messobjektes zu betrachten.

2.4.2 Berührungslose Messverfahren

Im Kapitel 2.4.1 wurden zwei Verfahren beschrieben, bei denen die Lichtwellen von Prismen reflektiert werden. Weitere Messverfahren, die in der Vermessung Anwendung finden, sind die Photogrammetrie, Fernerkundung, Aufnahme von Satellitenbildern und natürlich der Einsatz von Laserscannern. Hier soll speziell auf das terrestrische Laserscanning eingegangen werden, das eine reflektorlose Messung ermöglicht. Bei herkömmlichen Aufnahmeverfahren sind vor der Messung die Objektpunkte zu diskretisieren. Als Ergebnis erhält man eine strukturierte Punktmenge höherer Genauigkeit. Eine Alternative ist die rasterförmige Aufnahme. Das flächenhafte Abscannen liefert eine große Anzahl von Punkten, die unstrukturiert sind, und im Nachhinein mit großem Aufwand bei der Auswertung klassifiziert werden müssen.

Die Scanner messen zu den Objektpunkten die Richtungen (α, β) und die Distanzen d (siehe Abbildung 7). Die Messung liefert dreidimensionale Koordinaten (α, β, d) , die sich leicht in rechtwinklig kartesische Koordinaten (x, y, z) umrechnen lassen.

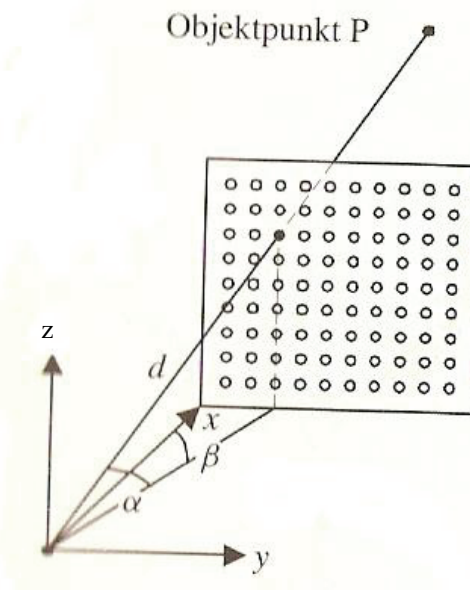


Abbildung 7: Inkrementelles Punktraster (Kahmen 2006)

Das Aufnahmeverfahren ist sehr flexibel, da die Geräte über beliebigen Punkten aufgebaut werden können. Zumeist beziehen sich die aufgemessenen Werte auf den Instrumentenstandpunkt und müssen in ein übergeordnetes oder in das Objektkoordinatensystem transformiert werden.

Der Vorteil der reflektorlosen Streckenmessung ist die direkte Messung zum Objekt ohne Zielmarken oder Prismen im Zielpunkt installieren zu müssen. Das von der Oberfläche reflektierte Laserlicht wird im Messgerät detektiert und ausgewertet. Die Distanzmesser arbeiten nach dem Phasenvergleichs- oder dem Impulsmessverfahren.

Der Laser besitzt eine Eigenschaft, die das ausgesandete Strahlenbündel nicht auseinander streben lässt. Die sogenannte Strahldivergenz, siehe Abbildung 4, ist auch auf sehr lange Distanzen sehr klein. Das bedeutet, dass auch auf große Entfernung die Energiedichte eines Laserlichtfleckes noch sehr groß ist. In die Messgeräte können Aufweitungsoptiken eingearbeitet werden, so dass die Strahlen fast vollständig parallel gesichtet werden können. Somit bleibt der Strahlungsdurchmesser über große Strecken nahezu gleich.

3. Messungsaufbau

3.1 Vorbereitende Überlegungen

Um die bereits genannten Fehlerquellen auszuschließen und für die Testmessungen möglichst laborähnliche Bedingungen zu erhalten, werden die Messungen in der Hochschule Neubrandenburg im Lehrgebäude 2, Raum 318 durchgeführt.

Damit für alle Messepochen dieselben Bedingungen gelten, werden jeweils die koordinierten Messpfeiler für die Stationierung und Orientierung verwendet. Die zu prüfende Ebene wird durch eine Projektionswand auf einem Drehtisch mit Gradteilung realisiert. Sie steht so, dass für alle Scanpunkte möglichst günstige Auftreffwinkel entstehen. Dabei sollen steile Visuren, Doppelreflexionen und Messschatten möglichst vermieden werden. Die Abbildung 8 zeigt den räumlichen Aufbau der Messung. Als Instrumentenstandpunkt diente der Pfeiler 6. Die Pfeiler 2 und 4 wurden mit den Reflektoren besetzt und für die Orientierung verwendet. Die Abbildung 9 zeigt das Trimble S6 ausgerichtet auf die Projektionswand. Für die erste Messung der als Referenz dienenden Epochen wurde das Gerät so eingerichtet, dass es senkrecht zur Ebene steht.

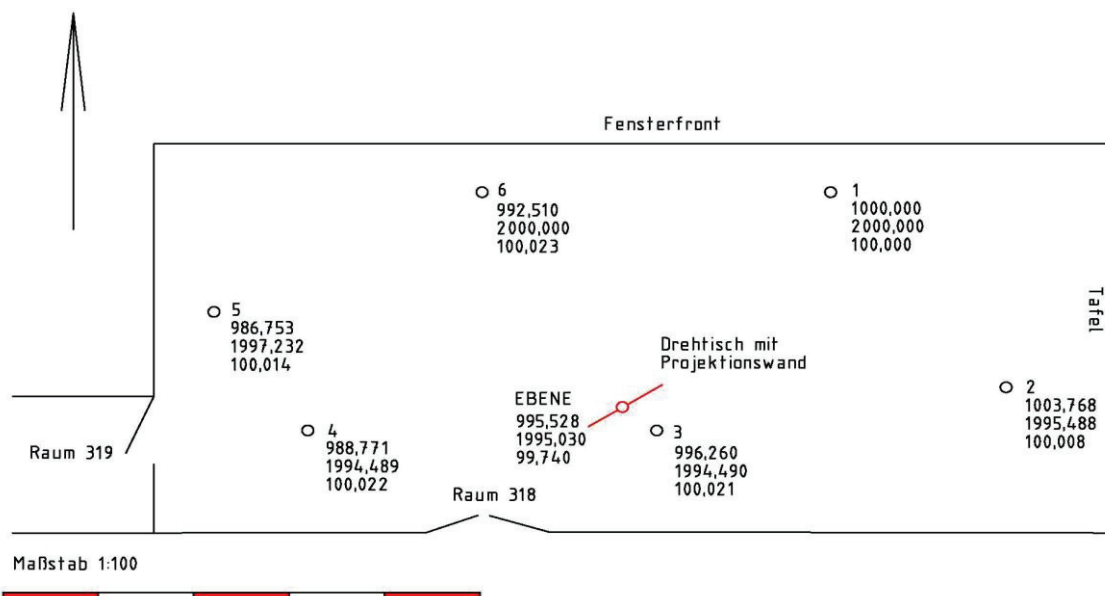


Abbildung 8: Messungsaufbau Raum 318, Lehrgebäude 2 der Hochschule Neubrandenburg

Die Koordinaten der Festpunkte sind auf mm angegeben und verwendet worden. Die Erfassung von atmosphärischen Einflüssen kann hier ebenfalls vernachlässigt werden. Die Temperatur wird konstant mit 21°C eingegeben. Eine Überprüfung der Abweichung der Laserstrahlrichtung mit der Visur der Zielachse für die reflektorlose Messung wurde nicht durchgeführt, da keine Notwendigkeit bestand. Beim Scannen werden keine speziell vermarkten Punkte wiederholt angezielt, so dass hier kein Fehlereinfluss zu Stande kommt. Eine Instrumentenprüfung in Hinsicht auf die Achsfehler und den Höhenindexfehler wird, wie in Kapitel 2.2 bereits erwähnt, halbjährlich durchgeführt. Die Korrekturparameter sind im Instrument abgespeichert und werden an die Messwerte und Positionierung angebracht. Die Ausführung der Orientierung und des Scanvorgangs erfolgte in einer Fernrohrlage.

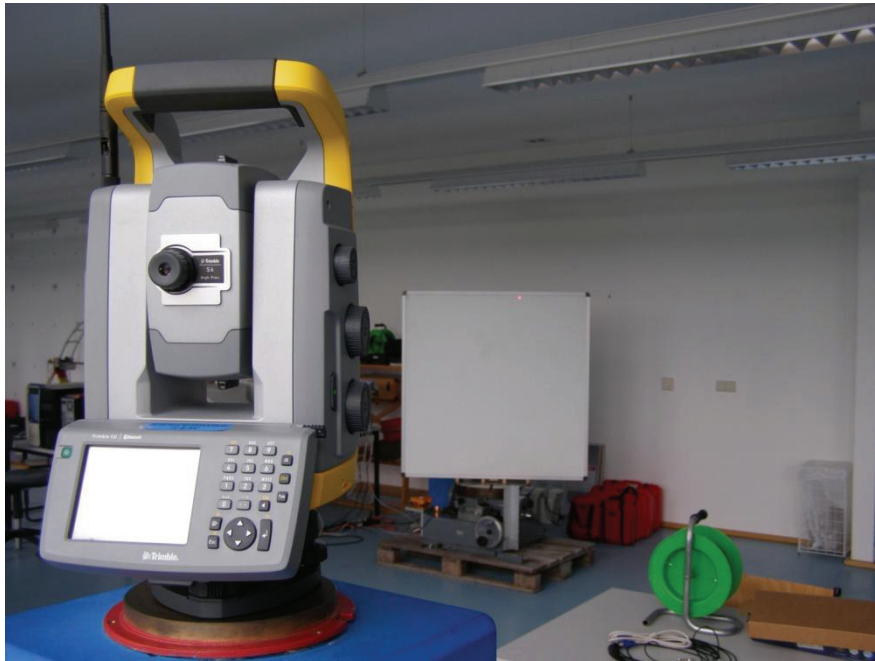


Abbildung 9: Foto mit Ansicht des Messungsaufbaus im Raum 318

Der Drehtisch (siehe Abbildung 10), auf dem die Projektionswand montiert ist, ist ein Teilkopf aus dem Bereich des Maschinenbaus und wird dort für Fräsarbeiten eingesetzt. An dem Teilkopf befinden sich zwei Kurbeln, mit denen eine Verdrehung in der Horizontalen und in der Vertikalen realisiert werden kann. Zwei Ableseinrichtungen lassen eine Bestimmung der Verdrehung im Bereich von Sekunden zu. Die Projektionswand selbst ist eine Spanplatte, die an den Außenseiten mit Aluprofilen verstärkt ist. Dadurch erfährt sie nur geringen Verzug, der

aber während der zeitnahen Messung keinen Einfluss auf das Ergebnis hat. Der Raum ist trocken und gewährleistet eine stabile Umgebung für den gesamten Zeitraum der Messung.



Abbildung 10: Drehtisch mit Kurbeln und Ableseeinrichtungen

3.2 Durchführung der Messung der Referenzepoche

Die Reflektoren werden auf den Pfeilern befestigt und horizontiert. Auf dem Pfeiler 6 befindet sich das Trimble S6. Nach dem Einschalten des Geräts wird zuerst die elektronische Libelle aktiviert. Das Gerät ist zu horizontieren. Anschließend wird ein neues Projekt angelegt. Da die Stationierung über bekannte Punkte erfolgt, werden zunächst die Koordinaten der drei verwendeten Pfeiler eingegeben. Im Programm-Menü befindet sich die Option 'Station bek. Punkt Plus'. Mit diesem Programm ist die Stationierung auf einem koordinatenmäßig bekannten Standpunkt mit Orientierung zu mehreren Punkten mit bekannten Koordinaten möglich. Nach der Messung werden die Residuen der bei der Stationierung beobachteten Anschlusspunkte angezeigt. Die Abweichungen entsprechen den Unterschieden zwischen den aus Koordinaten gerechneten und den gemessenen Richtungswinkeln. Somit lassen sich Aussagen über die Genauigkeiten der einzelnen Messungen treffen und Beobachtungen, die grobe Fehler enthalten, aus der Berechnung der Stationierung ausschließen. Im Resultat wird die Messung in

ihrer Gesamtheit betrachtet und eine Orientierungsunbekannte herausgegeben. Diese wurde für die Stationierungen jeweils mit 6,8 mgon bis 9,6 mgon angegeben. Unter der Angabe ist der Winkel zu verstehen, der die Abweichung zwischen dem Nullpunkt des Teilkreises und der Nullrichtung angibt. Vor den jeweiligen Messungen zu den Anschlusspunkten sind entsprechend die Kippachshöhe des Tachymeters und der Reflektoren einzugeben. Es ist darauf zu achten, dass die korrekte Prismenkonstante gewählt und der Prismenmodus für die Messung eingestellt ist.

Die Software des Trimble Survey Controllers bietet die Funktion 'Oberflächenscan' zur Durchführung eines Oberflächenscans an. An der Stelle erfolgt das Umschalten auf die reflektorlose Entfernungsmessung. Die Eingabe der Punktnummer des Startpunktes wird gefordert. Im Kapitel 2.2 wurden die drei verschiedenen Methoden zur Bestimmung der Dimension der Ebene erläutert. An der Stelle kann nun eine Methode gewählt werden. Die Methode 'Rechtwinklige Ebene' fordert drei Objektpunkte. Dazu werden, wie die Abbildung 2 demonstriert, ein Punkt links oben, ein Punkt rechts oben und ein dritter Punkt in der Mitte unten gemessen. Diese wurden zuvor auf der Ebene markiert, um für Folgemessungen wieder verwendet zu werden. Die Angabe des Punktabstands, der Zeilen und Spalten, lässt den Controller ein Raster und die Punktzahl berechnen. Die Ebene wird mit einem Punktabstand von 2 x 2 cm gescannt. Das Raster hat dementsprechend eine Größe von 60 x 59 Zeilen und Spalten mit 3540 Objektpunkten. Die Größe der Projektionswand beträgt etwa 1,20 m x 1,20 m. Die Messdauer wird mit circa 3h 20' angegeben, variiert aber von Messung zu Messung und wird am Ende der Messung meist länger angegeben mit etwa 3h 45'. Für die Ausgangsstellung der Ebene wurden die Teilkreise abgelesen. In der Horizontalen befand sich die Ebene für die Referenzmessung bei $161^{\circ}06'31''$. Für die Vertikalstellung betrug die Ablesung $0^{\circ}59'05''$. Um im Verlauf der Untersuchung auf die kleinste mögliche Änderung der Ebene aus der Nullstellung schließen zu können, wurde die Ebene für die ersten 3 Epochenmessungen nur um die vertikale Achse um jeweils 1' verdreht. Für die 4. Folgemessung wurde die Ebene wieder in ihre Ausgangsposition zurückgestellt. Es folgte an der Stelle eine Veränderung um die vertikale Achse um 1° . Für die fünfte und sechste Messung wurde die Ebene in Bezug auf die Referenzepoche um $H_z = 3'$ und V_z je um 1° verändert. Um eine signifikante Veränderung zu erreichen, wurde die

Ebene für die letzten drei Messungen um Hz ca. $-35'34''$ und Vz jeweils um 3° zur Nullstellung verdreht, durchgeführt.

3.3 Datenexport und Datenformate

Der Menüpunkt 'Import/Export' ermöglicht die Übertragung von Daten zu und von einem anderen Gerät. Zwei Möglichkeiten der Datenübertragung gibt es. Eine davon ermöglicht, die Daten von der Trimble CU direkt auf den Bürorechner zu übertragen. Dafür wird die Trimble CU über die Dockingstation an den USB-Port des PCs angeschlossen. Mit der Software 'ActiveSync' lassen sich die Daten transferieren und konvertieren. Die andere Möglichkeit bietet die Nutzung der Trimble RemoteControlUnit, über die die Daten von der eingeklickten TCU mittels des im Windows Mobile Betriebssystem vorhandenen Dateimanagers an einen angeschlossenen USB-Speicher übertragen werden können. Der Trimble Survey Controller speichert generell alle Mess- und Eingabewerte in einer Datenbank. Sie können allerdings in eine Vielzahl von Datentypen, beispielsweise *.JobXML, GDM-Jobdatei für ältere Geodimeter, CSV oder TXT, Dateien mit Komma getrenntem Inhalt exportiert werden. Das M5-Format entspricht dem durch die Firma Zeiss für die Elta-Tachymeter eingeführten Datenformat. Das Format enthält Beobachtungsdaten und Koordinaten der beobachteten Punkte. Die gewonnenen Punktwolken wurden in das Zeiss M5-Format exportiert. Die Daten sehen dann wie folgt aus:

Punktnummer	East-Wert	North-Wert	Höhe Z
For M5 Adr 00001 P11 1001	E_ 992.510 m	N_ 2000.000 m	Z 100.023 m
For M5 Adr 00002 P11 1002	E_ 1003.768 m	N_ 1995.488 m	Z 100.008 m
For M5 Adr 00003 P11 1003	E_ 988.771 m	N_ 1994.489 m	Z 100.022 m
For M5 Adr 00004 P11 201	E_ 996.032 m	N_ 1995.308 m	Z 100.333 m
For M5 Adr 00005 P11 202	E_ 995.035 m	N_ 1994.700 m	Z 100.306 m

Abbildung 11: Zeiss M5-Dateiformat

4. Mathematische Grundlagen

4.1 Die Allgemeine Ebene

Die analytische Geometrie beschäftigt sich mit der Untersuchung von Punktmen- gen mittels rechnerischer Methoden. Zum Beispiel lassen sich Abstände, Längen und Winkel berechnen und Lagebeziehungen und Schnitte zwischen den ein- fachsten geometrischen Grundelementen Punkten, Geraden und Ebenen fest- stellen. Um einen Punkt im Raum eindeutig zu bestimmen, bedarf es eines Ko- ordinatensystems. Drei Achsen, die einen gemeinsamen Punkt haben, den „Ur- sprung“ und paarweise rechtwinklig aufeinander stehen, beschreiben ein dreidi- mensionales Koordinatensystem. Die Einteilung der Achsen erfolgt in gleicher Weise.

Allgemein lässt sich eine Ebene durch einen Punkt und zwei nicht kollineare² Vektoren eindeutig beschreiben. Die *Punkttrichtungsgleichung* der Ebene enthält den Ortsvektor \overrightarrow{OP} und die Richtungsvektoren u und v , siehe Abbildung 12.

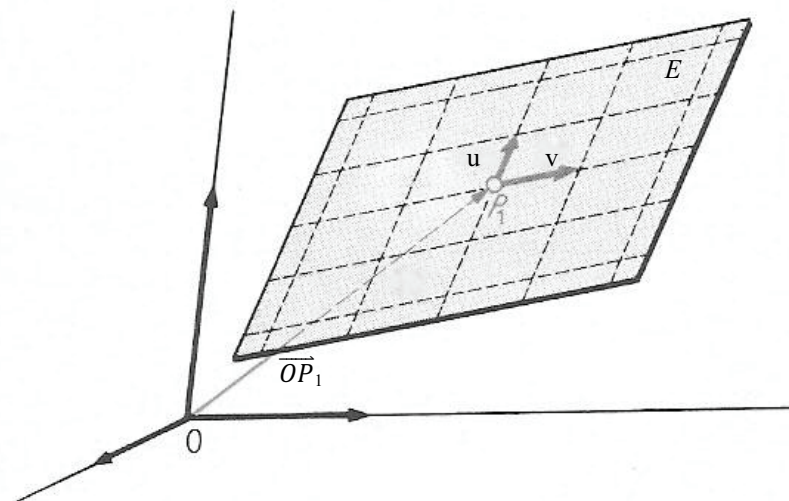


Abbildung 12: Parameterdarstellung der Ebene (Köhler, Höwelmann und Krämer 1974)

² Kollinearität heißt, mindestens ein Vektor lässt sich als ein Vielfaches eines anderen darstellen, Bsp: $\vec{a} = r \cdot \vec{b}$ mit $r \in \mathbb{R}$, diese Vektoren sind zueinander parallel und haben die gleiche Richtung

Mit Hilfe einer Linearkombination $su + tv$ kann man jeden mit u und v komplanaren³ Vektor darstellen.

Formel 1: Punktrichtungsgleichung

$$E: X = \overrightarrow{OP_1} + su + tv$$

Der Vektor erreicht jeden Punkt X der Ebene, wenn s und t unabhängig voneinander alle reellen Zahlen durchlaufen.

Andererseits lässt sich eine Ebene auch eindeutig bestimmen, indem sie durch drei Punkte (P_1, P_2, P_3) gelegt wird, die nicht auf einer Geraden liegen dürfen. Die so genannte *Dreipunktgleichung* (Abbildung 13) der Ebene lässt sich mathematisch wie folgt beschreiben

Formel 2: Dreipunktgleichung

$$E: X = \overrightarrow{OP_1} + su + tv.$$

Sie ist identisch mit der Punktrichtungsgleichung in Formel 1. Der Unterschied zur Dreipunktgleichung ist, dass die Richtungsvektoren bereits gegeben sind. In Formel 2 ist $\overrightarrow{OP_1}$ der Ortsvektor. Die linear unabhängigen Richtungsvektoren u und v ergeben sich aus $(P_2 - P_1)$ beziehungsweise $(P_3 - P_1)$.

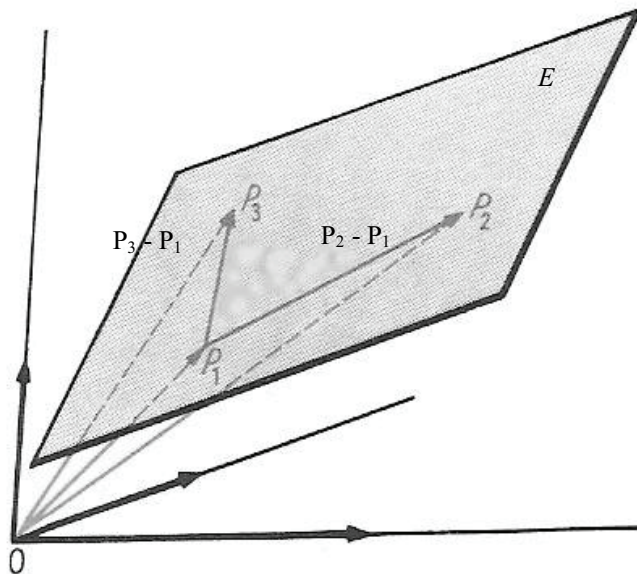


Abbildung 13: Dreipunktgleichung (Köhler, Höwelmann und Krämer 1974)

³ Drei Vektoren $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ sind komplanar, wenn sich mindestens einer dieser Vektoren aus den restlichen beiden darstellen lässt, Bsp.: $\vec{a} = s_1\vec{b} + t_1\vec{c}$

Aus der Parameterform der Ebene lassen sich die Parameter s und t eliminieren. So erhält man die *Koordinatengleichung* der Ebene, auch *Allgemeine Ebenengleichung* genannt.

Formel 3: Koordinatengleichung

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Es gilt für $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$. Der orthogonale Abstand der Ebene zum Koordinatenursprung wird mit D bezeichnet. Die Koordinatengleichung ist frei von Vektoren und Parametern. Sie enthält lediglich noch die Koordinaten der einzelnen Punkte und heißt deshalb auch Koordinatengleichung.

Mit der Einführung des Skalarproduktes an dieser Stelle besteht eine weitere Möglichkeit der Charakterisierung einer Ebene. Diese Art der Beschreibung ist besonders einfach und wird häufig für Gleichungen angewandt. Jede Ebene im Raum besitzt unendlich viele Lotvektoren (auch Normalvektoren), die alle untereinander kollinear sind. Einer der Normalvektoren \vec{n} und ein fester Punkt \vec{p} der Ebene beschreiben diese eindeutig, siehe Abbildung 14. Mathematisch definiert sieht das wie folgt aus:

Formel 4: Punkt-Normalform in vektorieller Darstellung

$$E: (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$$

und heißt *Punkt-Normalform in vektorieller Darstellung*. Der Vektor \vec{x} ist ein beliebiger Punkt der Ebene, der die Ebene durchläuft. Der Richtungsvektor $\vec{x} - \vec{p}$ liegt in der Ebene und \vec{n} steht senkrecht dazu.

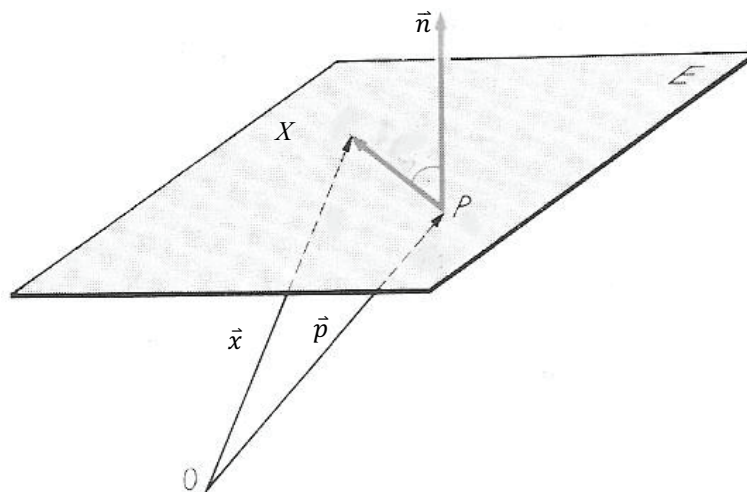


Abbildung 14: Punkt-Normalform in vektorieller Darstellung (Köhler, Höwelmann und Krämer 1974)

Normalvektoren sind linear abhängig, das heißt, sie sind alle parallel oder ein Vielfaches voneinander. Der Begriff der Normalen taucht hier wiederholt auf. Eine Normale steht immer senkrecht zu etwas, in dem Fall zur Ebene: $\vec{n} \perp E$.

Die *Allgemeine Normalform* der Koordinatengleichung lässt sich auch in vektorieller Form beschreiben:

Formel 5: Allgemeine Normalform

$$E: \vec{n} \cdot \vec{p} = d$$

und soll hier eine Grundlage für die Ausgleichsrechnung darstellen. Die Gleichung wird beschrieben mit dem Normalvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$, den Koordinaten eines

Punktes $\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ auf der Ebene und dem orthogonalen Abstand d der Ebene vom

Koordinatenursprung. Für die Berechnung des Normalvektors, wenn nicht vorgegeben, werden drei Punkte benötigt. Ein Punkt entspricht dabei dem Ortsvektor, und mit den beiden weiteren Punkten lassen sich die Richtungsvektoren berechnen und die Ebene aufspannen. Sie dürfen nicht auf einer Geraden liegen. Das Kreuzprodukt aus den Richtungsvektoren ergibt den Normalvektor, der senkrecht auf der Ebene steht.

4.2 Die Hessesche Ebenengleichung

Der mathematische Ansatz für den Ausgleichsalgorithmus baut auf der *Hesseschen Normalform* der Ebenengleichung auf. Die Ebenengleichung in vektorieller Darstellung sieht wie folgt aus:

Formel 6: Ebenengleichung in vektorieller Schreibweise

$$E: (\vec{x} - \vec{a}) \cdot \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n} = 0$$

Formel 7: Normaleinheitsvektor

$$\text{mit} \quad \vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$$

durch Einsetzen von Formel 7 in Formel 6 folgt

Formel 8: Hessesche Normalform einer Ebene (HNF)

$$E: (\vec{x} - \vec{a}) \cdot \vec{n}_0 = 0$$

Aus der Abbildung 14 geht hervor, dass \vec{p} der Ortsvektor der Ebene ist $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ mit P als einem festen Punkt auf der Ebene. Der Stützvektor zu einem beliebigen Punkt X der Ebene ist $\vec{x} = \overrightarrow{OX}$. Der Koordinatenursprung ist mit O bezeichnet. Des Weiteren gilt:

$$\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP} = \vec{x} - \vec{p} \text{ und } (\vec{x} - \vec{p}) \perp \vec{n}$$

Für ein und dieselbe Ebene gilt, dass die Koordinaten eines Normalvektors gleichzeitig die Koeffizienten der Koordinatengleichungen sind und umgekehrt.

Nun gibt es ebenfalls unendlich viele Einheitsvektoren wie Normalvektoren. Deren Länge beträgt dann eine Längeneinheit und ergibt sich, wenn der Vektor durch seine Länge, also seinen Betrag geteilt wird. Die Länge eines Vektors ist

$$|\vec{x}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Die Normierung des Vektors ist notwendig, damit für eine Ebene nicht unendlich viele Normalvektoren angegeben werden können. Der Normaleinheitsvektor wird mit \vec{n}_0 bezeichnet, siehe Formel 7 und hat die Länge 1. Er liefert für die Ausgleichung die zweite Bedingung.

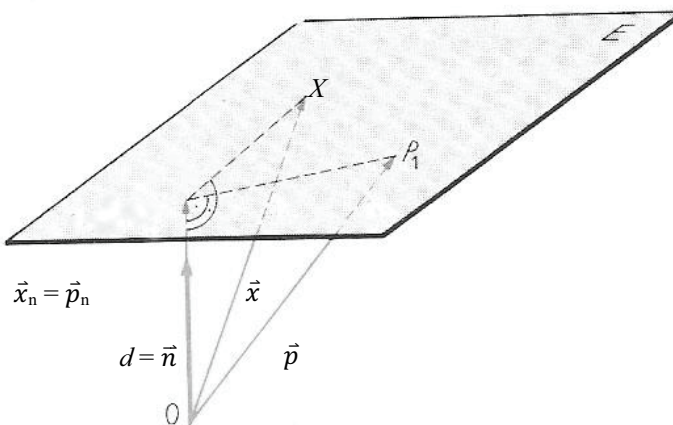


Abbildung 15: Darstellung des Normalvektors der Ebene (Köhler, Höwelmann und Krämer 1974)

Anhand der Abbildung 15 kann festgestellt werden, dass der Abstand d dem $|n|$ -fachen Abstand der Ebene vom Nullpunkt entspricht. Rein rechnerisch ergibt sich

das aus der *Punkt-Normalform* des skalaren Produktes $\vec{n}\vec{p}$. Die Normalform mit dem Normaleinheitsvektor

Formel 9: Hessesche Normalform in Koordinatenform

$$E: \vec{n}_0 \vec{p} - d = 0$$

lässt den Abstand vom Nullpunkt direkt ablesen.

4.3 Berechnung von Winkeln zwischen Ebenen

Um später die Lagebeziehungen zweier Ebenen zu bestimmen, sollen kurz die verschiedenen Positionen zueinander beschrieben werden. Zwei Ebenen können identisch, parallel oder verschieden von einander sein, schneiden sich aber an der Schnittgeraden. Für den ersten Fall gilt, dass die Ebenen alle Punkte gemeinsam haben. Im zweiten Fall sind keine gemeinsamen Punkte vorhanden. Beim dritten Fall haben die Ebenen unendlich viele Punkte gemeinsam, aber nicht alle. Sondern nur die, die auf der Schnittgeraden liegen.

Die Berechnung der Schnittwinkel zwischen den Normalvektoren bzw. Schnittwinkeln zwischen Ebenen lassen sich vom Kosinussatz ableiten. Der Schnittwinkel kann mit Hilfe des Skalarproduktes wie folgt berechnet werden.

Formel 10: Schnittwinkel zwischen Normalvektoren

$$\cos \alpha (\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

Formel 11: Schnittwinkel zwischen Ebenen

$$\cos \alpha (\vec{E}_1, \vec{E}_2) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

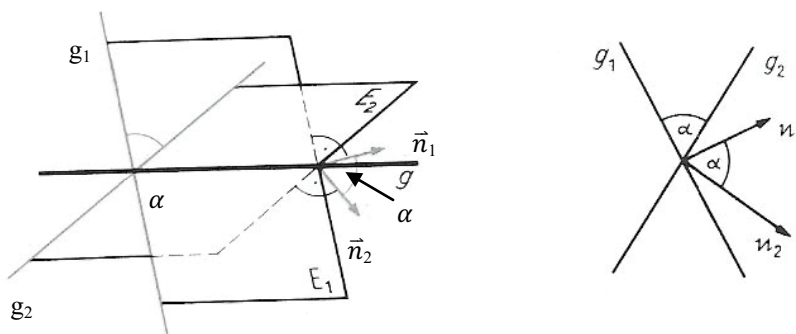


Abbildung 16: Schnittwinkel zwischen Ebenen abgeleitet aus Schnittwinkeln zwischen Geraden (Köhler, Höwelmann und Krämer 1974)

5. Varianzfortpflanzungsgesetz

5.1 Allgemeines

Das Varianzfortpflanzungsgesetz, im Folgenden mit VFG abgekürzt, findet Anwendung, wenn aus beobachteten Größen, die mit zufälligen Abweichungen behaftet sind, weitere abzuleiten sind, oder wenn Größen nicht direkt gemessen werden können. Es ist also von Interesse, wie sich die Standardabweichungen s_r und s_D der Ausgangswerte auf die berechneten Größen „fortpflanzen“. Wenn das VFG angewendet wird, liegen keine Überbestimmungen vor, so dass keine Ausgleichsrechnung nötig ist. Die Ausgangswerte, meistens in einem Beobachtungsvektor L zusammengefasst, besitzen Angaben zu ihrer Genauigkeit, die Standardabweichungen σ . Diese können sowohl empirisch als auch theoretisch vorliegen. Die Standardabweichungen werden in der Kovarianzmatrix der Beobachtungen Σ_{LL} auf der Diagonale zusammengefasst.

$$\Sigma_{LL} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & & 0 \\ & \sigma_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

Die Nebenelemente, hier mit Nullen besetzt, drücken aus, dass die Beobachtungen nicht korreliert sind. Nachdem das stochastische Modell steht, ist ein funktionales Modell zu formulieren. Das Modell enthält die partiellen Ableitungen der Bedingungsgleichungen nach den Beobachtungen. Diese werden in der Matrix F zusammengefasst. Das VFG lautet wie folgt:

$$\Sigma_{XX} = F \cdot \Sigma_{LL} \cdot F^T.$$

5.2 Anwendung des Varianzfortpflanzungsgesetzes im Rahmen der Bachelor-Arbeit

Die für die Ausgleichung benötigten Standardabweichungen der Beobachtungen werden über das VFG berechnet. Die Kovarianzmatrix enthält die Genauigkeitsangaben der Richtungs- und Streckenmessung aus den Angaben des Herstel-

lers. Die F - Matrix wird mit den partiellen Ableitungen nach den Formeln für polares Anhängen aufgestellt, unter Berücksichtigung der Z - Komponente:

$$1. N_2 = N_1 + s_1 \cdot \sin(z_1) \cdot \cos(t_1)$$

$$2. E_2 = E_1 + s_1 \cdot \sin(z_1) \cdot \sin(t_1)$$

$$3. Z_2 = Z_1 + s_1 \cdot \cos(z_2).$$

Die sich daraus ergebenden Koordinaten entsprechen den Beobachtungen mit den Standardabweichungen.

Die Berechnung der Differenz zwischen den Normalvektoren, kann erst erfolgen, wenn ihre Richtungen r_1 und r_2 bekannt sind. Auch hier werden die zugehörigen Genauigkeitsparameter benötigt. Es folgt die Anwendung des VFG. Σ_{LL} enthält die mit der Ausgleichung gewonnenen Standardabweichungen der Normalvektoren für die Komponenten N und E . Aus Koordinaten lassen sich immer Richtung und Strecke berechnen. Das führt zu den Bedingungsgleichungen für das funktionale Modell:

$$1. t = \arctan \frac{E}{N}$$

$$2. s = \sqrt{N^2 + E^2}$$

Die Genauigkeitsangaben für die Richtungen s_{t1} und s_{t2} aus der Σ_{XX} und die Richtungen selbst werden für die Berechnung des Winkels verwendet. Der Winkel ergibt sich aus der Differenz $\alpha = r_2 - r_1$. Das ist gleichzeitig die Bedingungsgleichung für das funktionale Modell des VFG. Der Winkel α und die Standardabweichungen der Richtungen s_{t1} und s_{t2} werden im Signifikanztest gebraucht.

6. Ausgleichsrechnung

6.1 Grundlagen

Charakteristisch für geodätische Überwachungsmessungen ist, dass mehr Beobachtungen ausgeführt werden, als zur eindeutigen Bestimmung der gesuchten Größe notwendig sind. In Bezug auf die Ebene sind drei Objektpunkte erforderlich, um diese zu beschreiben. Das Scanverfahren liefert im Ergebnis ein Vielfaches an Punkten, deutlich mehr als gefordert. Somit lassen sich ein hohes Maß an Genauigkeit und schließlich eine Qualitätsbeurteilung des Ergebnisses erbringen. Deshalb ist es durchaus sinnvoll, erhebliche Überbestimmungen zuzulassen. Außerdem soll der Ausschluss von groben Fehlern gesichert sein. Des Weiteren kann nicht davon ausgegangen werden, dass alle Punkte mit der gleichen Genauigkeit erfasst werden, das gilt auch für die unterschiedlichen Messperioden. Es besteht also die Aufgabe, Modelle hoher Genauigkeit zu entwickeln. Wenn also für eine eindeutige Beschreibung des Modells, mehr Beobachtungen vorhanden sind als notwendig, ergibt sich ein Ausgleichsproblem. Mit Hilfe der heute leistungsfähigen Computer werden umfangreiche Ausgleichsaufgaben in kurzer Zeit bewältigt. Ausgleichung kann auch als „Schätzung von Parametern in linearen Modellen“ bezeichnet werden. Die klassische Methode der kleinsten Quadrate ist eine Art der Parameterschätzung, neben robusten Schätzverfahren, die immer häufiger Einsatz finden. Bereits um 1800 wurde dieses Problem von Carl Friedrich Gauß und Adrien Marie Legendre erkannt und ein Ausgleichsverfahren nach der klassischen Methode entwickelt.

Für die Modellierung der Ausgleichsaufgabe sind Zusammenhänge zwischen den Messgrößen und den unbekannt Parametern mit mathematischen Formeln zu finden, so dass sich meist lineare Beobachtungsgleichungen ergeben. Wenn das nicht der Fall ist, und ein nichtlineares Modell vorliegt, ist eine Überführung in eine lineare Gleichung notwendig. Im ersten Schritt sind für die unbekannt Parameter Näherungswerte zu bestimmen. Entweder durch Berechnung aus geeigneten Beobachtungen, damit die Zuschläge möglichst klein bleiben, oder es liegen Näherungswerte vor.

Die Taylorentwicklung des funktionalen Zusammenhangs beschreibt die Änderungen dl_i der Beobachtungen bei kleiner Änderung dx_j der Parameter. Voraussetzung dafür ist, dass alle auftretenden Fehler „klein“ und auf die 1. Ableitung der Funktion nach den unbekanntem Parametern beschränkt sind. Dabei stellt sich heraus, dass die partiellen Ableitungen Konstanten sind.

Neben den funktionalen Beschreibungen sind auch die Genauigkeitsbeschreibungen zu betrachten und mathematisch wiederzugeben. Das Maß der Genauigkeit entspricht der Standardabweichung σ beziehungsweise dem Quadrat der Standardabweichung, der Varianz σ^2 .

6.2 Parameterschätzung

Im Kapitel 4 wurden die Näherungswerte der Koeffizienten für den Normalvektor beziehungsweise Normaleinheitsvektor und die Schwerpunktkoordinaten schon angesprochen. Diese Schätzung der Parameter soll hier beleuchtet werden. Die Parameter der Funktion sind zunächst unbekannt. Für eine Ausgleichung werden sie aber gebraucht und müssen daher möglichst gut geschätzt werden. Das Scannen liefert als Ergebnis die Messwerte x_i ($i = 1, 2, \dots, n$), die als aus der Grundgesamtheit entnommene Stichprobe vom Umfang n aufgefasst werden können. Mit Hilfe der Statistik lassen sich die Eigenschaften der Grundgesamtheit anhand der Stichprobe mit guter Annäherung bestimmen (Witte und Schmidt 2000). Das Gleiche gilt auch für die Schätzung a priori der Standardabweichungen s_0 beziehungsweise der Varianz σ_0^2 . Die Parameter werden mit griechischen Buchstaben bezeichnet, und die Parametersymbole der Schätzwerte erhalten meistens eine hoch- oder tiefgestellte Null (⁰). Zum Beispiel wird die Standardabweichung mit dem Symbol σ_0 bezeichnet. Zusätzlich erhalten die unbekanntem Parameter ein Dach ([^]). Näherungswerte für die Ebenenparameter der HNF (Formel 8) sind für die Ausgleichung festzulegen. Standardmäßig bietet sich als fester Punkt der Ebene der Schwerpunkt an, der sich aus allen Punkten der Ebenen berechnen lässt. Der Schätzwert des Schwerpunktes der Ebene kann über die Anzahl der einzelnen Messwerte und deren Summe im Einzelnen direkt berechnet werden.

Formel 12: Schwerpunkt der Ebene

$$x_S = \frac{\sum x_i}{n}, y_S = \frac{\sum y_i}{n}, z_S = \frac{\sum z_i}{n}$$

Zusammengefasst in einem Vektor für die Näherungswerte der Schwerpunktkoordinaten:

$$\vec{s}_0 = \left[\frac{\sum x_i}{n} \quad \frac{\sum y_i}{n} \quad \frac{\sum z_i}{n} \right]$$

Die Schätzparameter des Schwerpunktes fließen nicht mit in die Ausgleichung. Sie stellen hier also keine unbekannt Parameter dar. Sie werden lediglich für die Bestimmung des Abstands \hat{d} und der zwei Punkte P_1 und P_2 benötigt, aus denen der Normalvektor der Ebene berechnet wird. Die zu schätzenden Koeffizienten des Normalvektors lassen sich aus dem Kreuzprodukt der zwei Punkte P_1 und P_2 berechnen. Die Punkte sollten dabei eine günstige Lage zueinander haben und nicht unmittelbar beieinander liegen. Sie sollten weit voneinander entfernt sein, um die Ebene gut zu beschreiben.

Formel 13: Kreuzprodukt zweier Vektoren

$$\vec{n} = \vec{P1} \times \vec{P2} = \begin{pmatrix} x1 \\ y1 \\ z1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x2 \\ y2 \\ z2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} y1 z2 - z1 y2 \\ z1 x2 - x1 z2 \\ x1 y2 - y1 x2 \end{pmatrix}$$

Anschließend ergibt sich aus der Normierung des Vektors nach Formel 7 der Näherungswert des Normaleinheitsvektors \hat{n}_0 . Der Näherungswert für den Abstand \hat{d} kann nach Umstellen der Formel 9 berechnet werden. Für den Vektor \vec{p} wird der Schwerpunktvektor \vec{s}_0 eingesetzt.

Formel 14: Näherungswert für \hat{d}

$$\hat{d}_0 = -\hat{n}_0 \cdot \vec{s}_0$$

Die Schätzung der Varianz σ_0^2 (a priori) steht im engen Zusammenhang mit den Standardabweichungen für die einzelnen Beobachtungen. Diese werden über das VFG ermittelt.

6.3 Modellbildung für den Allgemeinfeld der Ausgleichung

6.3.1 Funktionales Modell

An Stelle des üblichen Verfahrens der Ausgleichung nach dem Gauß-Markov-Modell soll für das Ausgleichungsproblem der Ebene die nichtlineare „bedingte Ausgleichung mit Unbekannten und Bedingungen zwischen den Unbekannten“, auch nichtlineares verallgemeinertes Gauß-Helmert-Modell (GHM), verwendet werden. Das Modell wird auch als *Allgemeinfeld der Ausgleichungsrechnung* bezeichnet. Das Besondere an dem Modell ist, dass nicht jede Beobachtung l_i als eigene Funktion der Parameter \hat{x} dargestellt werden kann. Es kann dementsprechend vorkommen, dass in den funktionalen Beziehungen gleichzeitig mehrere Beobachtungen und Unbekannte auftreten. Es folgt die implizite Formulierung eines im Allgemeinen nichtlinearen funktionalen Zusammenhangs zwischen den Beobachtungen und den Unbekannten \hat{X} .

$$\phi(\tilde{L}, \tilde{X}) = 0$$

Der Beobachtungsvektor L enthält in dem Fall alle gemessenen lokalen Koordinaten

$$L_{(n,1)} = (x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n)^T$$

und der Unbekanntenvektor mit den Parametern für die Ebene lautet zunächst

$$\hat{X}_{(u,1)} = (\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d})$$

Für den Aufbau des funktionalen Modells ist Voraussetzung, einen sachlogischen Zusammenhang zwischen den Messgrößen und den zu bestimmenden Parametern zu finden. Darauf wurde in Kapitel 4 eingegangen. Da heißt es, alle beliebigen Punkte einer Ebene im Raum erfüllen die 'Allgemeine Ebenengleichung'. Die mathematische Grundlage hierfür bietet die Hessesche Normalform. Die Bedingungsgleichungen für jeden Punkt mit den Koordinaten $P_i(x_i, y_i, z_i)$ und dem Unbekanntenvektor $\hat{X}_0 = (\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d})$ leiten sich aus den Widerspruchsvektoren an der Stelle der Näherungswerte ab.

Formel 15: Bedingungsgleichung 1

$$\phi_i: w_1 = x_i \cdot \hat{a}_0 + y_i \cdot \hat{b}_0 + z_i \cdot \hat{c}_0 + \hat{d}_0 = 0$$

Eine zweite Bedingungsgleichung für eine eindeutige Beschreibung der Ebene wird eingeführt

Formel 16: Bedingungsgleichung 2

$$\phi_2: w_2 = \hat{a}_0^2 + \hat{b}_0^2 + \hat{c}_0^2 = 1$$

Für die Probe mit den Schätzparametern X_0 und den Beobachtungen L_0 gilt dann

Formel 17: Probe

$$\phi(L_0, X_0) = 0.$$

6.3.2 Stochastisches Modell

In das stochastische Modell fließen die Genauigkeiten in Form der Standardabweichungen für die Beobachtungen hinein. Diese müssen möglichst zuverlässig sein, da die gesuchten Parameter \hat{x} und deren Genauigkeiten unmittelbar von ihnen beeinflusst sind. Hier kommen jetzt die Herstellerangaben des Trimble S6 ins Spiel. In die Standardabweichungen fließen neben konstanten a auch entfernungsabhängige b Anteile ein. Dabei spielen die Richtungs- und Streckenmessgenauigkeiten eine Rolle, aus denen weitere Größen, wie Koordinaten, abgeleitet werden. Für die Standardabweichung der Distanzmessung gilt folgende Beziehung $\sigma_s = a + b \cdot s$. Die Genauigkeit der Richtungsmessung kann mit $\sigma_r = a + \frac{b}{s} \cdot \rho$ angegeben werden, wobei b hier die Zentrier- und Anzielabweichung in Abhängigkeit von der Zielentfernung s entspricht. Mittels VFG lassen sich die Genauigkeiten der Koordinaten bestimmen und in der Kovarianzmatrix zusammenfassen.

Formel 18: Kovarianzmatrix der Beobachtungen

$$\Sigma_{LL} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & & 0 \\ & \sigma_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sigma n^2 \end{pmatrix}$$

Die Nebenelemente der Kovarianzmatrix werden mit Nullen besetzt. Andernfalls, wenn sich Korrelationen zwischen den Beobachtungen erfassen lassen, werden diese an der Stelle eingetragen. Die Varianz der Gewichtseinheit (a priori) σ_0^2 wird für die Aufstellung der Kofaktormatrix der Beobachtungen benötigt.

Formel 19: Kofaktormatrix der Beobachtungen

$$Q_{LL} = \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot \Sigma_{LL}$$

6.3.3 Ausgleichungsalgorithmus

Da mehr als drei Punkte auf der Ebene liegen, sind die unbekanntes Ebenenparameter \hat{a} , \hat{b} , \hat{c} und \hat{d} nach dem Allgemeinfeld der Ausgleichsrechnung zu bestimmen. Die Anzahl der unbekanntes Parameter wird mit u (hier: 4) bezeichnet. Die Anzahl der Bedingungsgleichungen wird mit r beschrieben. Das n gibt die Anzahl der Beobachtungen an. Das Aufstellen der Matrix A erfolgt mit der partiellen Ableitung der Bedingungsgleichung ϕ_1 nach den Unbekanntes. Die B -Matrix enthält die partiell Ableitung der Bedingungsgleichung ϕ_1 nach den Beobachtungen und Matrix C enthält die partielle Ableitung der Bedingungsgleichung ϕ_2 nach den unbekanntes Parametern.

Formel 20: Matrix A

$$A_{(r, u)} = \left(\frac{\partial \phi_1(L, X)}{\partial X} \right)_0$$

Formel 21: Matrix B

$$B_{(r, n)} = \left(\frac{\partial \phi_1(L, X)}{\partial L} \right)_0$$

Formel 22: Matrix C

$$C_{(1, u)} = \left(\frac{\partial \phi_2(L, X)}{\partial X} \right)_0$$

Die Lösung für die Unbekanntes \hat{X} erhält man aus dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -A^T(BQ_{LL}B^T)^{-1}A & C^T \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{X} \\ k_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^T(BQ_{LL}B^T)^{-1}w_1 \\ -w_2 \end{pmatrix}$$

Die Kofaktormatrix der Beobachtungen wird mit Q_{LL} bezeichnet und der Korrelationsvektor mit k_1 .

Die Umsetzung des Ausgleichungsalgorithmus und Auflösung des Gleichungssystems mit MATLAB erfolgt mit den Matrizen:

$H11 = - (A' * \text{inv} (B * QLL * B') * A)$	}	- Auflösung des linearen Gleichungssystems
$H12 = C'$		
$H21 = C$		
$H22 = 0$		
$HH = [H11 H12; H21 H22]$		
$QQ = \text{inv} (HH)$		
$WW = [A' * \text{inv} (B * QLL * B') * w; ww]$		
$EE = QQ * WW$	}	- Ausgegliche gekürzte Unbekannte
$xd = EE(1:4)$		
$XD = X_0 + xd$		- Ausgegliche Unbekannte
$Norm = XD(1:3)$		- Normaleinheitsvektor
$k1 = \text{inv} (B * QLL * B') * (- A * xd - w)$		- Korrelatenvektor
$v = QLL * B' * k1$		- Verbesserungsvektor
$Ld = I + v$		- Ausgegliche Beobachtung
$LProbe(i) = Ld(x_i) * XD(1,1) + Ld(y_i) * XD(2,1) + Ld(z_i) * XD(3,1) + XD(4,1)$	}	- Schlussprobe
$ProbeLaengenbedingung = XD(1)^2 + XD(2)^2 + XD(3)^2 - 1$		
$s02 = - k1' * (w + A * xd) / (\text{length}(w) + 1)$		- Varianz der Gewichtseinheit

Der anschließende statistische Test zwischen den Varianzen σ_0^2 und s_0^2 erfolgt nach dem *F*-Test. Dieser wird im Kapitel 7.3.2 erläutert. Abschließend sind die Kofaktormatrix $Q_{x^{\wedge}x^{\wedge}} = -QQ$ und Kovarianzmatrix $\Sigma_{x^{\wedge}x^{\wedge}} = s_0^2 \cdot Q_{x^{\wedge}x^{\wedge}}$ der ausgeglichenen Unbekannten zu berechnen. Die Kofaktormatrix enthält die Standardabweichungen der einzelnen Koordinaten sowie die Korrelationen zwischen den Werten. Es können weitere Genauigkeitskriterien aus der Kofaktormatrix abgegriffen werden, die zwischen den Koordinatenunbekannten bestehen. Beispielsweise lassen sich allgemeine Angaben zur Punktgenauigkeit (Fehlerellipsen, Konfidenzellipsen und Punktfehler) ableiten.

Die Referenzepoche und die Folgeepochen werden jeweils nach dem Algorithmus separat ausgeglichen. Die sich daraus ergebenden ausgeglichenen Ebenenparameter, sprich die Normaleinheitsvektoren, werden anschließend in eine Funktion eingebaut, die den Winkel zwischen den Vektoren berechnet.

7. Statistischer Test

7. 1 Statistische Testverfahren

Die Beurteilung der Messergebnisse und der daraus abgeleiteten Größen unter Berücksichtigung der Messgenauigkeit ist ein wesentlicher Punkt in der Geodäsie. Die generelle Durchführung einer solchen Beurteilung lässt sich an Hand zweier Messwerte x_i und x_j wie folgt zeigen. Die beiden Messwerte stellen beispielsweise dieselbe Größe für eine Strecke zwischen zwei Punkten dar. Die Abweichung $\Delta x = x_i - x_j$ wird als Messungenauigkeit angenommen, falls $|\Delta x| \leq T \cdot \sigma$ ist.

Dabei ist σ eine Genauigkeitsangabe für Δx und der Wert T ein sinnvoll zu wählender Faktor. Die Werte sollen gesicherten Erkenntnissen entsprechen, zum Beispiel den Angaben der Gerätehersteller für die theoretische Standardabweichung σ_s der Streckenmessung. Als Grundlage für empirische Standardabweichungen s_s können auch Erfahrungswerte genutzt werden, wenn ein Instrument über einen längeren Zeitraum verwendet wurde. Eine weitere Möglichkeit, Genauigkeitsangaben abzuleiten, besteht nach einer Ausgleichung, wenn diese einen möglichst großen Freiheitsgrad aufweist. Für T können auch Erfahrungswerte genutzt werden. Dann gilt das Produkt $T \cdot \sigma$ als eine Grenze für die Beurteilung der Abweichung $|\Delta x|$. Die Regel „ $3 \cdot \sigma$ “ kann hier Anwendung finden, wenn $T = 3$ gewählt wird.

Die Anwendung statistischer Testverfahren setzt Annahmen über die Verteilung der zu testenden Größe voraus. Sinnvolle Ergebnisse werden dann erzielt, wenn die Annahme tatsächlich gilt. Die Auswahl eines Schrankenwertes T , unterhalb dessen eine Hypothese angenommen werden kann, erfolgt durch die Festlegung einer Irrtumswahrscheinlichkeit α , die in vielen Anwendungen mit $\alpha = 5\%$ festgelegt wird.

Die Auswertung eines Tests erfolgt nach den folgenden Schritten:

- Formulieren der Fragestellung
- Definition der Nullhypothese H_0 und Alternativhypothese H_A

- Auswahl der zutreffenden Testverteilung
- Berechnung der Prüfgröße aus den Beobachtungen
- Festlegen des Signifikanzniveaus α
- Berechnung der Testgrenzen für den Annahme- und Verwerfungsbereich
- Entscheidung über Annahme oder Ablehnung der Hypothese
- Testergebnis formulieren

Die Tests lassen sich auf verschiedene Vergleichsverfahren anwenden:

- a) Vergleich einer normalverteilten Größe mit ihrem gegebenen Erwartungswert,
- b) Vergleich des Erwartungswertes zweier normalverteilter Messgrößen, die das gleiche Phänomen beschreiben
- c) Vergleich einer empirischen Standardabweichung s_0 mit der theoretischen Standardabweichung σ_0
- d) Vergleich von zwei empirisch ermittelten Standardabweichungen s_{01} und s_{02}

In der nachstehenden Tabelle 1 sind diese von a) bis d) zusammengefasst mit der Formulierung der Alternativhypothese als zweiseitige und einseitige Fragestellung:

Tabelle 1: Zusammenstellung statistischer Testverfahren (Neitzel, Ausgleichsrechnung - Modellbildung, Auswertung, Qualitätsbeurteilung 2010)

	Test	Null-hypothese H_0	Alternativ-hypothese H_A	Prüfgröße	Schrankenwert	Annahme von H_0 , wenn
a)	t-Test	$E\{x\} = \mu$	$E\{x\} \neq \mu$; $E\{x\} < \mu$, $E\{x\} > \mu$	$T_t = \frac{ x - \mu }{s_x}$	$t_{t, 1-\alpha}$	$T_t \leq t_{t, 1-\alpha}$
b)	t-Test	$E\{\Delta x\} =$ $E\{x_j\} - E\{x_i\} = 0$	$E\{\Delta x\} \neq 0$; $E\{\Delta x\} < 0$, $E\{\Delta x\} > 0$	$T_t = \frac{ \Delta x }{s_{\Delta x}}$	$t_{t_{\text{par}}, 1-\alpha}$	$T_t \leq t_{t_{\text{par}}, 1-\alpha}$
c)	χ^2 -Test	$E\{s_0^2\} = \sigma_0^2$	$E\{s_0^2\} \neq \sigma_0^2$; $E\{s_0^2\} < \sigma_0^2$, $E\{s_0^2\} > \sigma_0^2$	$T_{\chi^2} = \frac{f \cdot s_0^2}{\sigma_0^2}$	$\chi_{t, 1-\alpha}^2$	$T_{\chi^2} \leq \chi_{t, 1-\alpha}^2$
d)	F-Test	$E\{s_{01}^2\} =$ $E\{s_{02}^2\} = \sigma_0^2$	$E\{s_{01}^2\} \neq E\{s_{02}^2\}$; $E\{s_{01}^2\} < E\{s_{02}^2\}$, $E\{s_{01}^2\} > E\{s_{02}^2\}$	$T_f = \frac{s_{01}^2}{s_{02}^2}$ mit $s_{01} > s_{02}$	$F_{t_1, t_2, 1-\alpha}$	$T_f \leq F_{t_1, t_2, 1-\alpha}$

Mit der Irrtumswahrscheinlichkeit α ist festgelegt, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Nullhypothese verworfen wird, obwohl sie richtig ist (Fehler erster Art). In Bezug auf eine Deformationsanalyse werden Deformationen angezeigt, die nicht vorhanden sind. Der umgekehrte Fall, dass Deformationen nicht angezeigt werden, obwohl sie vorhanden sind, ist die Wahrscheinlichkeit β , mit der die Nullhypothese angenommen wird, obwohl sie falsch ist (Fehler zweiter Art). Das kann schwerwiegende Folgen haben. Die als Testgüte bezeichnete Wahrscheinlichkeit $\gamma=1-\beta$ ist die, mit der die Alternativhypothese angenommen wird. Die Testgüte γ nimmt zu, je kleiner der Wert β wird. Gleichzeitig wird α größer. Die Einführung des Nichtzentralitätsparameters λ an dieser Stelle beschreibt, wie weit Null- und Alternativhypothese auseinander liegen. Für große Werte von λ liegen die Hypothesen weit auseinander. Das heißt, die Trennschärfe des Tests wird größer. Wählt man bei gleichbleibender Nichtzentralität λ einen größeren Wert für die Irrtumswahrscheinlichkeit α , so nimmt die Testgüte λ zu, siehe Abbildung 17. Dadurch besteht aber wiederum die Möglichkeit, einen Fehler erster Art zu begehen. Das zeigt also, dass die Wahl von α sehr sorgfältig getroffen werden muss.

(Neitzel, Ausgleichsrechnung - Modellbildung, Auswertung, Qualitätsbeurteilung 2010)

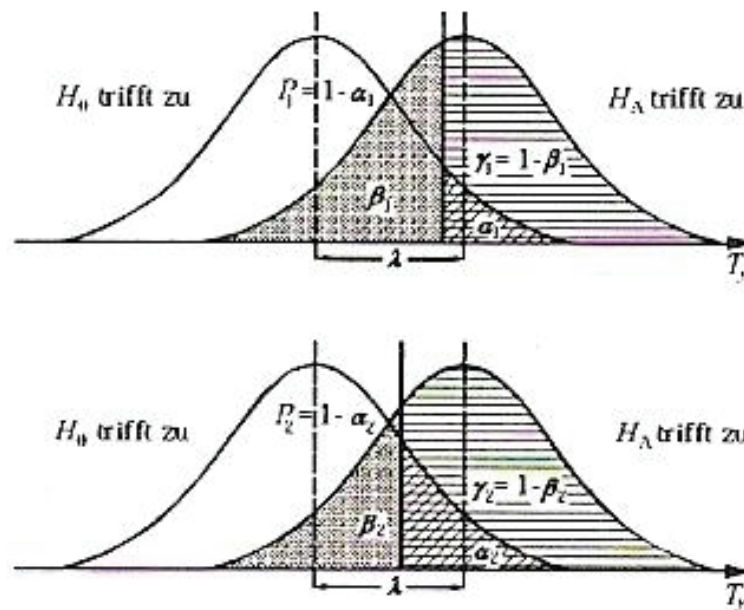


Abbildung 17: Zunahme der Testgüte $\lambda_2 > \lambda_1$ wenn bei gleichbleibender Nichtzentralität λ mit $\alpha_2 > \alpha_1$ die Irrtumswahrscheinlichkeit erhöht wird (Neitzel, Ausgleichsrechnung - Modellbildung, Auswertung, Qualitätsbeurteilung 2010)

Nach der Ausgleichung und der Bestimmung der Parameter ist die Überprüfung und Qualitätssicherung der Ergebnisse ein Anliegen des Geodäten. Dabei spielen Gütekriterien wie Genauigkeit und Zuverlässigkeit eine Rolle. Die Kofaktormatrix der unbekannt Parameter enthält die gebräuchlichen Genauigkeitsmaße. Voraussetzungen für die Angabe von Genauigkeitsmaßen sind, dass

- die Modellbildung möglichst vollständig ist,
- das Ergebnis im Idealfall nicht oder zumindest nur in geringem Umfang von groben Fehlern in den Eingangsdaten beeinflusst wird,
- der Einfluss der zufälligen Abweichungen durch die aufgestellte Varianz-Kovarianzmatrix zutreffend beschrieben ist. (Neitzel, Ausgleichsrechnung - Modellbildung, Auswertung, Qualitätsbeurteilung 2010)

Grobe Fehler lassen sich dann erst ausschließen, wenn die drei Punkte erfüllt sind. Genauigkeiten, die im Wesentlichen von den Messgeräten, den Messver-

fahren und bestimmten Messbedingungen abhängig sind, nennt man innere Genauigkeiten. Diese werden bestimmt durch die a priori Standardabweichungen der Messwerte σ_i (Richtungen, Strecken). Die Einhaltung der Standardabweichungen für die Messwertgruppen wird im Ausgleichungsmodell mit einer Varianzkomponentenschätzung überprüft. Die äußere Genauigkeit ergibt sich aus der Punktbestimmung mit den a posteriori Standardabweichungen der Koordinaten und deren Konfidenzellipsen (Möser, Müller, et al., Handbuch Ingenieurvermessung - Grundlagen 2000). Eine Aussage über die Zuverlässigkeit des Ausgleichungsergebnisses beschreibt die Kontrollmöglichkeit innerhalb der Ausgleichung

- grobe Fehler in den Beobachtungen zu lokalisieren,
- den Einfluss eventuell nicht erkannter grober Fehler auf die Parameter abzuschätzen,
- die gegenseitige Kontrolle von Beobachtungen abzuschätzen.

Die empirischen Mittelwerte beziehungsweise die ausgeglichenen Messwerte und die empirische Standardabweichung, die aus den Messwerten berechnet sind, weichen vom Erwartungswert mehr oder weniger ab. Ob es sich dabei um zufällige Abweichungen handelt oder um Ausreißer, grobe Fehler, ist im Rahmen einer Deformationsanalyse mit einem Test zu klären. Es ist dabei zu entscheiden, ob es sich tatsächlich um Deformationen oder lediglich um Messunsicherheiten und Festpunktveränderungen handelt.

7.2 Empirische und theoretische Varianz

Die theoretische Streuung σ_0^2 ist meist vorgegeben, entweder durch die Forderung einer einzuhaltenden Messgenauigkeit, oder vom Hersteller mit der Angabe für die Richtungs- und Streckenmessgenauigkeit. Nach der Messung der einzelnen Beobachtungen lassen sich empirische Varianzen s_0^2 aus den Verbesserungen, die an die Messwerte angebracht werden, berechnen und die vorgegebene Streuung mit einer gewissen Sicherheitswahrscheinlichkeit $P = 1 - \alpha$ überprüfen. Die aufgestellte Nullhypothese $H_0: E\{s_0^2\} = \sigma_0^2$ ist demnach zu prüfen. Nach der Formel für die empirische Varianz kann gesagt werden, dass $\sum_{i=1}^n v_i^2 = s_0^2(n-1)$

ist. Die normierte Größe $\hat{F} = \frac{s_0^2}{\sigma_0^2}$ dient dabei als Prüfgröße und ist normalverteilt mit f Freiheitsgraden für s_0^2 und $f = \infty$ für σ_0^2 , falls die Nullhypothese zutrifft. Wenn der Test ergibt, dass die zu prüfende Größe nicht größer als das kritische Quantil ist, also $\hat{F} \leq F_{f1, f2, 1-\alpha}$, darf die Nullhypothese nicht abgelehnt werden: σ_0^2 und s_0^2 können gleichberechtigt verwendet werden.

Die Parameter der Einzelepochen und die jeweiligen Beobachtungen werden als unabhängig angesehen. Das ist gekennzeichnet durch die mit den Nullelementen besetzte Kofaktormatrix Q_{LL} der Beobachtungen. Funktionale und stochastische Unabhängigkeit erlauben, die Einzelepochen getrennt auszugleichen. Dadurch ist es möglich, Qualitätsmerkmale der Genauigkeit und Zuverlässigkeit jeder Netzbeobachtung zutreffend zu beurteilen. Empirische Einheitsvarianzen der Einzelausgleichungen können miteinander verglichen werden. Signifikante Unterschiede sind durch entsprechende Ansätze in den Kofaktormatrizen Q_{LL} zu berücksichtigen. Für alle Einzelepochen muss Varianz (a priori) identisch sein.

Die unter 7.3 erläuterten Tests werden zunächst theoretisch betrachtet. Angewendet werden sie in der Ausgleichung, dem Epochenvergleich und der Prüfung des Winkels zwischen zwei Normaleinheitsvektoren auf Signifikanz in der Präsentation der Ergebnisse im Kapitel 9.

7.3 Tests quadratischer Größen

7.3.1 Test einer empirischen Varianz gegen eine theoretische

Die mit der Ausgleichung gewonnene Genauigkeitssteigerung muss abschließend geprüft werden. In der Praxis wird erwartet, dass die empirische Standardabweichung s_0 (a posteriori) in etwa der Varianz σ_0^2 (a priori) entspricht. Das läuft auf einen Test hinaus. Die erwartungstreue Schätzung der Nullhypothese lautet

1. $H_0: E \{s_0^2\} = \sigma_0^2$

und die der Alternativhypothese

2. $H_A: E \{s_0^2\} > \sigma_0^2$.

Für $s_0 > \sigma_0$ lautet die Testgröße $\hat{F} = \frac{s_0^2}{\sigma_0^2}$. Das Quantil wird mit $F_{f, \infty, 1-\alpha}$ angesetzt. Die Freiheitsgrade f sind nach der Anzahl der Beobachtungen zu wählen $f = n - 1$. Die theoretische Varianz wird mit ∞ angenommen. Dabei ist die Irrtumswahrscheinlichkeit ist mit 95 % anzusetzen. Somit ergibt sich für $\alpha = 1 - 0,95 = 0,05$ (\triangleq signifikant). H_0 wird angenommen, wenn $\hat{F} \leq F_{f, \infty, 1-\alpha}$ ist. Der Wert für das Quantil wird aus der zugehörigen Tabelle der *Fisher*-Verteilung (siehe Anhang B), abgegriffen. Aus der Tabelle ergibt sich für die Anzahl der Freiheitsgrade das Quantil mit 1. Wenn die Testgröße größer als das Quantil ist $\hat{F} > F_{f, \infty, 1-\alpha}$, so wird die Nullhypothese verworfen und die Alternativhypothese angenommen. Dann liegt ein Fehler im stochastischen Modell vor. Die Gewichtung der Beobachtungen zueinander müssen überprüft werden. Ein Fehler im funktionalen Modell ist eher selten.

7.3.2 Test zweier Standardabweichungen

Nach der Ausgleichung zweier Messepochen werden die empirischen Varianzen s_1^2 und s_2^2 miteinander verglichen, um zu beurteilen, ob diese mit der gleichen Genauigkeit vorliegen. Die Hypothesen werden wie Kapitel 7.3.1 auch nach dem Fall d) aus Tabelle 1 wie folgt aufgestellt:

1. $H_0: E \{s_1^2\} = E \{s_2^2\}$ und
2. $H_A: E \{s_1^2\} > E \{s_2^2\}$.

Dabei handelt es sich um einen einseitigen Test. Das Quantil $F_{f_2, f_1, 1-\alpha} = 1$, für f_1 und f_2 mit ∞ und $\alpha = 0.05$. Für die Testgröße ergibt sich $\hat{F} = \frac{s_2^2}{s_1^2}$. Aufgrund der hohen Anzahl der Messwerte liegen entsprechend hohe Freiheitsgrade vor. Somit ergeben sich für die Quantile der Test Werte um 1 aus der Tabelle im Anhang B der *Fisher*-Verteilung. Die Entscheidung H_0 anzunehmen erfolgt, wenn $\hat{F} \leq F_{f_2, f_1, 1-\alpha}$ ist. H_0 wird verworfen, wenn $\hat{F} > F_{f_2, f_1, 1-\alpha}$ ist.

7.3.3 Test einer Differenz zwischen zwei Zufallsgrößen

Der Winkel, der sich aus der Differenz der Normaleinheitsvektoren ergibt, wird auf Signifikanz getestet. Dieser Test eines Einzelwertes entspricht dem Fall b)

der Tabelle 1. Die Werte sind „standard-normalverteilt“ (Tabelle siehe Anhang B). Die Fragestellung des Tests ist hier zweiseitig mit $\frac{\alpha}{2}$ formuliert. Die Hypothesen lauten:

$$1. H_0: E \{ \Delta\mu \} = 0$$

$$2. H_A: E \{ \Delta\mu \} \neq 0$$

Die Testgröße $\hat{y} = \frac{\Delta\mu}{\sigma_{\Delta\mu}}$ beinhaltet die Differenz eines Mittelwertes zu einem Erwartungswert und die Differenz der Standardabweichung beider Normalvektoren. Die Standardabweichungen der Normaleinheitsvektoren erhält man mit der Ausgleichung. Die Prüfgröße wird aus den Beobachtungen berechnet. Der Winkel zwischen den Normaleinheitsvektoren repräsentiert das $\Delta\mu$. Die Standardabweichungen der beiden Normaleinheitsvektoren werden zusammengefasst zum $\sigma_{\Delta\mu} = \sqrt{s_1^2 + s_2^2}$. Das Signifikanzniveau ist auch hier mit $\alpha = 5\% = 0.05$ festgelegt. Wegen der zweiseitigen Fragestellung ist die Berechnung der Testgrenzen für den Annahme- und Verwerfungsbereich das Quantil $y_{1-\alpha/2} = y_{0.975} = 1,96$. Eine Entscheidung über Annahme oder Ablehnung der Hypothesen erfolgt nach dem Kriterium, wenn $\hat{y} \leq y_{1-\alpha/2}$, dann ist H_0 anzunehmen und H_A zu verwerfen. Andernfalls wenn $\hat{y} > y_{1-\alpha/2}$ ist, dann ist die Alternativhypothese anzunehmen und H_0 zu verwerfen.

Nach der Ausgleichung erhält man die Normaleinheitsvektoren mit ihren Standardabweichungen. Für die Referenzepoche ergeben sich:

$$\text{Norm1} = [a_1 \ b_1 \ c_1]^T, \ s_{\text{Norm1}} = [s_{x1} \ s_{y1} \ s_{z1}]^T$$

und für die Folgeepoche:

$$\text{Norm2} = [a_2 \ b_2 \ c_2]^T, \ s_{\text{Norm2}} = [s_{x2} \ s_{y2} \ s_{z2}]^T$$

Der Winkel ergibt sich, wie in Kapitel 5 beschrieben, aus der Differenz beiden Richtungen $t_2 - t_1$. Aus den Parametern der Normaleinheitsvektoren lassen sich über die allgemeine Formel $t = \arctan \frac{y}{x}$ diese berechnen. Über VFG erhält man zu den Richtungen die Standardabweichungen der Richtungen s_{t1} und s_{t2} . Durch wiederholtes Anwenden des VFG kann anschließend der Winkel mit seiner Standardabweichung ermittelt werden. Für den Signifikanztest werden die Stan-

dardabweichungen der eben berechneten Richtungen s_{t1} und s_{t2} verwendet. Diese werden zu $\sigma_{\Delta\mu}$ zusammengefasst. Der Winkel wird im Bogenmaß zur Berechnung der Testgröße bereitgestellt.

„An dieser Stelle sind zwei Fälle zu unterscheiden. Zum Einen: „Es kann davon ausgegangen werden, dass die theoretischen Varianzen beider Messreihen gleich sind“. Wenn $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ gilt, dann gilt es ebenso für die Erwartungswerte $E(s_{x1}^2) = \sigma_1^2 = E(s_{x2}^2) = \sigma_2^2 = \sigma^2$. Als Konsequenz kann aus beiden Messreihen eine gemeinsame/bessere Schätzung für σ^2 abgeleitet werden. Dieser Schätzwert berücksichtigt beide Freiheitsgrade mit $f = f_1 + f_2$ und wird für die Bestimmung der Varianzen der Mittelwerte statt der Einzelschätzungen eingesetzt. Zum Anderen: „Es kann *nicht* davon ausgegangen werden, die theoretischen Varianzen beider Messreihen gleich sind“. Es gilt $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$. Diese Situation ist prinzipiell immer gegeben, wenn unterschiedliche Messinstrumente eingesetzt werden, aber auch, wenn die äußeren Bedingungen verschieden sind. Streng gibt es für dieses sogenannte 'Behrens-Fisher-Problem' keine Lösung, doch hat Welch (1937) eine Näherungslösung erarbeitet,...“ (Niemeier, Ausgleichsrechnung - statistische Auswertungsmethoden 2008) „Unter dem 'Behrens-Fisher-Problem' versteht man den Test auf Gleichheit der Erwartungswerte, wobei nicht davon ausgegangen werden kann, dass die Verteilungen der Zufallsvariablen gleiche Varianzen haben. Dabei handelt es sich um Normalverteilungsmodell bei ungleichen und unbekanntem Varianzen einen Unterschied in den Erwartungswerten aufzudecken.“ (Kulle 1999)

In dem Fall der Ebenen liegen große Punktwolken vom Scannen vor. Es sind dementsprechend zwei stochastisch unabhängige und normalverteilte Zufallsvariablen L_1 und L_2 , für die ausreichend umfangreiche Beobachtungen vorliegen, gegeben. Die Varianzen werden mit der Ausgleichung gewonnen. Da genügend Messwerte vorliegen, kann geprüft werden, ob ein 'Behrens-Fisher-Problem' vorliegt.

Die Tabellen in Anhang D zeigen nach dem Testverfahren Kapitel 7.3.2, dass die Varianzen leicht um den Wert des Quantils schwanken. Schlussfolgernd wären die Freiheitsgrade über das 'Behrens-Fisher-Problem' mittels der Näherungslösung von Welch zu bestimmen.

8. MATLAB

8.1 Beschreibung der verwendeten Software

Die Abkürzung MATLAB⁴ steht für *Matrix Laboratory*. MATLAB ist ein interaktives Softwaresystem für die Bereiche technischer und naturwissenschaftlicher Disziplinen. Mit dem Programm sind wissenschaftliche, numerische Berechnungen und die Entwicklung von Algorithmen möglich. Mit dem dialogorientierten Programmsystem lassen sich 3D-Grafiken zur Visualisierung von Ergebnissen mit einer Plotfunktion erstellen. Dies ist nur eine Anwendungsmöglichkeit. Des Weiteren können technische Probleme modelliert, sowie simuliert werden. Anwendungen mit graphischer Benutzeroberfläche sind möglich. Das Lösen von Gleichungsverfahren, wie auch iterative Lösungsverfahren lassen sich schnell und einfach erledigen. Die Darstellung von Verschiebungsvektoren lässt sich realisieren, und integrierte Toolboxen ermöglichen, mathematische Funktionen, wie partielle Differentiale, Integrale und viele andere, einfach anzuwenden.

Durch einfaches Bedienen und die Vielzahl implementierter Funktionen ist es für Neueinsteiger der Programmierung leicht zu erlernen. MATLAB ist Matrizenorientiert und somit besonders geeignet für die lineare Algebra. Mit MATLAB können Daten aus einem File eingelesen und bearbeitet werden. Ferner können MATLAB-Befehle, dazu gehören Steuer-Befehle wie DO-Schleifen oder IF-Anweisungen, in einen File (M-File) geschrieben und dann im MATLAB-Kontext ausgeführt werden. Das Einbinden weiterer Programmiercodes wie C/C++, FORTRAN und JAVA ermöglicht die Erweiterung durch eigene Programme.

MATLAB wurde Ende der siebziger Jahre von dem Numeriker *Cleve Moler* in FORTRAN geschrieben. Die klassische Version wurde schon 1984 von der C-Version abgelöst. Es folgten in den nächsten Jahren Weiterentwicklungen des Programms bis 2000 mit der Version 6 (R12), mit der erstmals die JAVA Unterstützung möglich war. Nach 6.5 (R13) folgte MATLAB 7 (R14) die auch den Studierenden der Hochschule Neubrandenburg als zur Verfügung steht. Mit der Version besteht die Möglichkeit auch M-Files in HTML und LATEX zu veröffentli-

⁴ MATLAB® ist eingetragenes Warenzeichen von The MathWork Inc.

chen. Die darauffolgende Version 7.6 (R2008a) aus dem Jahr 2008 unterstützt noch besser die objektorientierte Programmierung innerhalb von MATLAB. Es folgten noch 2008 die Version 7.7 (R2008b) und 2009 die Version 7.8 (R2009a).

Die im Rahmen der Bachelorarbeit verwendete Version von MATLAB 7.6.0.324 (R2008a) vom 10. Februar 2008 hat eine Arbeitsoberfläche, die in verschiedene Bearbeitungsfenster untergliedert ist, und die beliebig ein- und ausgeschaltet werden kann. Im Command Window (1) werden neben der Eingabeaufforderung >> (prompt) interaktive Befehle eingegeben und ausgeführt. Das aktuelle Verzeichnis, in dem gearbeitet wird, wird in der Adresszeile 'Current Directory' (2) eingestellt und befindet sich unter der Menüleiste (3). Links wird die Dateistruktur des in der Adresszeile eingestellten Verzeichnisses angezeigt. Variablen können im Reiter 'Workspace' (5) angezeigt

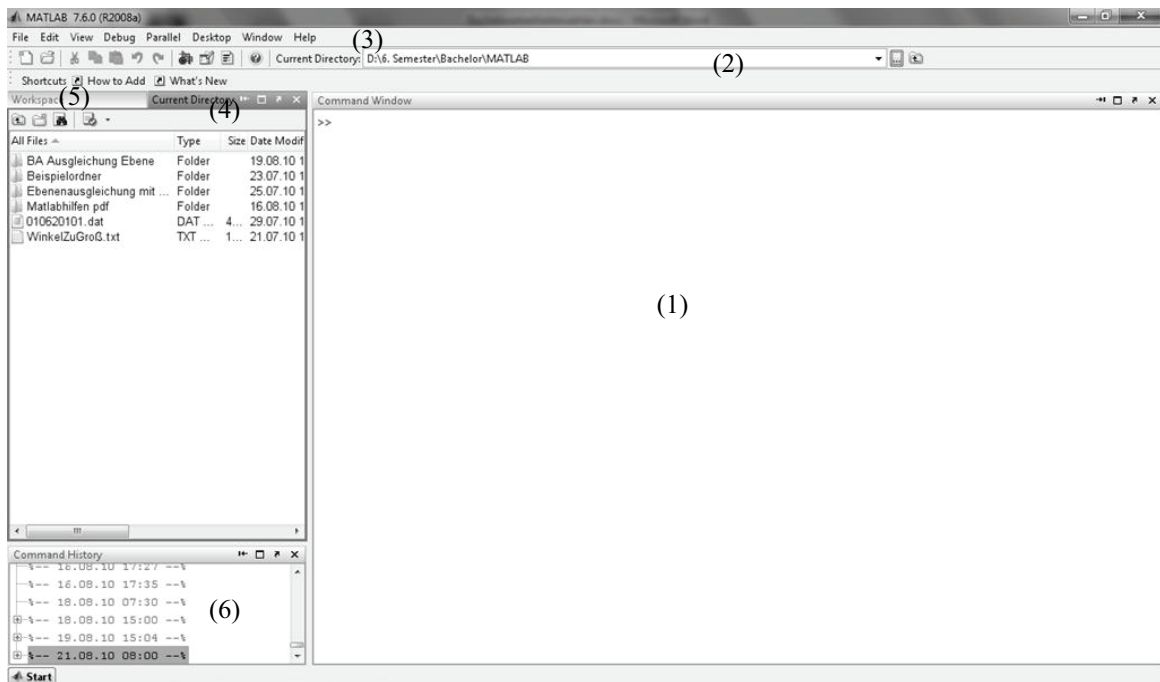


Abbildung 18: MATLAB Arbeitsoberfläche

werden. In einem Variablen-Editor lassen sich diese sich bearbeiten und separat als *.mat-Datei speichern. Das Command History (6) Fenster protokolliert sämtliche Befehle, die im Command Window eingegeben werden.

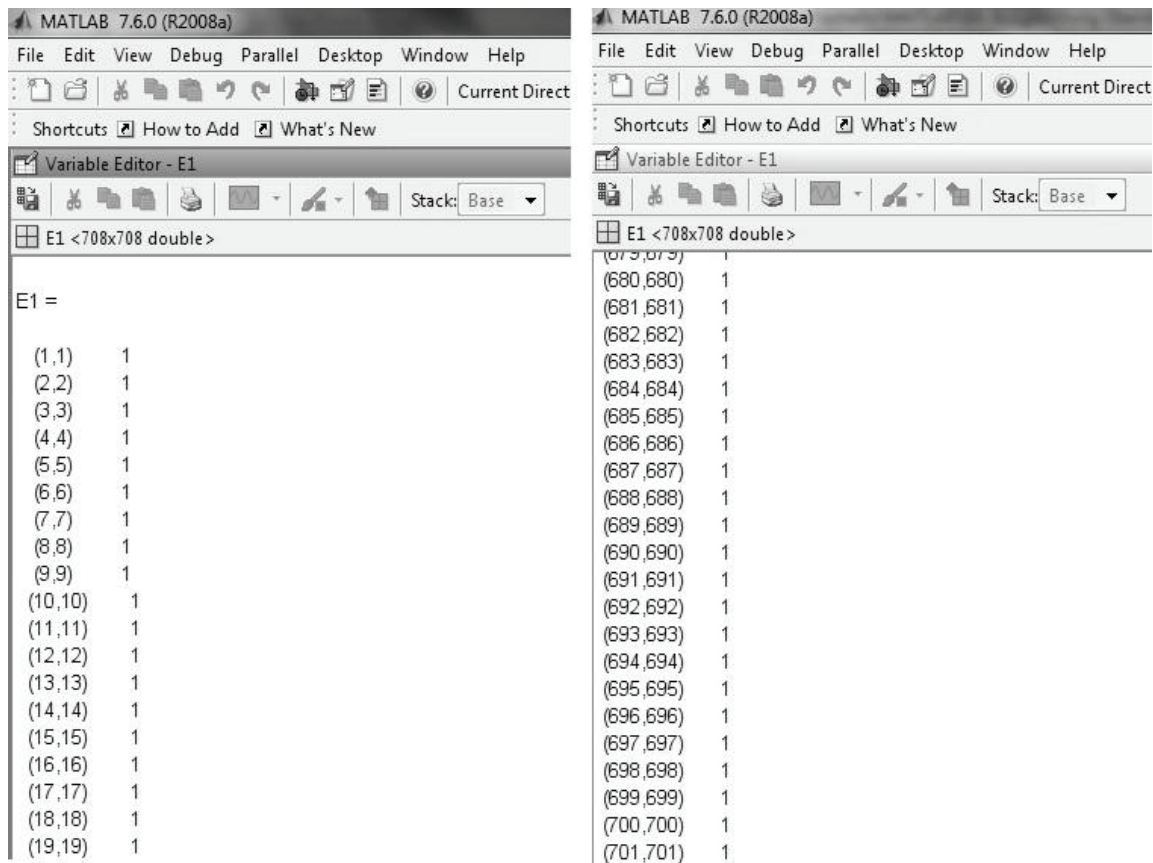
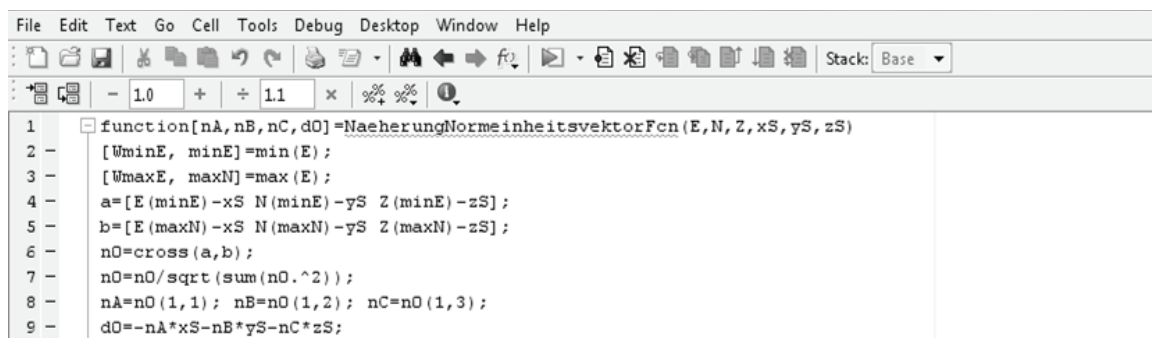


Abbildung 22: Beispiel, wie Werte einer Sparsenmatrix effektiv abgespeichert werden

Für die Arbeit mit dem Programm sollen noch einige wichtige Informationen zur Kenntnis genommen werden. Im Kommando-Fenster, in dem die Eingabeaufforderung (>>) angezeigt wird, können die Kommandos eingegeben werden. Endet die Eingabe in der Befehlszeile mit einem Semikolon (;), so wird unterdrückt, dass die Eingabe sofort als Ergebnis wieder auf der Arbeitsoberfläche erscheint. Die Variablen werden lediglich im Workspace abgelegt. Um Zeilen 'auszukommentieren', wird das Prozentzeichen (%) vor dem Kommentar eingesetzt. Alles Weitere, was hinter diesem Zeichen in einer Befehlszeile steht, wird vom MATLAB-Interpreter ignoriert. Das Gleichheitszeichen (=) dient als Zuweisungsoperator.

8.3 Umsetzung des Ausgleichsalgorithmus

Als erstes wird die Datei zeilenweise eingelesen. Der Inhalt wird den Variablen E , N und Z zugewiesen. Diese stellen die Koordinaten der Ebene dar. Der Beobachtungsvektor L wird mit den Koordinaten aufgestellt. Mit dem Befehl $length(L)$ wird seine Länge bestimmt. Die gibt die Anzahl der Beobachtungen n an. Als nächstes werden die Näherungswerte für den Schwerpunkt in der *SchwerpunktFcn* berechnet. Diese werden für den nächsten Schritt gebraucht. Die Näherungswerte für den Normaleinheitsvektor sollen berechnet werden. Dafür muss vorausgesetzt sein, dass die Punkte und der Schwerpunkt nicht unmittelbar auf einer Geraden liegen. Die Funktion *NaeherungNormeinheitsvektorFcn* (Abbildung 23) ermittelt den kleinsten Rechtswert und den größten Rechtswert. Die Vektoren a und b werden in Bezug auf den Schwerpunkt aus dem Produkt der Koordinaten mit $min(E)$ und $max(E)$



```

1 function[nA, nB, nC, dO]=NaeherungNormeinheitsvektorFcn(E,N,Z,xS,yS,zS)
2 [UminE, minE]=min(E);
3 [UmaxE, maxN]=max(E);
4 a=[E(minE)-xS N(minE)-yS Z(minE)-zS];
5 b=[E(maxN)-xS N(maxN)-yS Z(maxN)-zS];
6 nO=cross(a,b);
7 nO=nO/sqrt(sum(nO.^2));
8 nA=nO(1,1); nB=nO(1,2); nC=nO(1,3);
9 dO=-nA*xS-nB*yS-nC*zS;

```

Abbildung 23: Function für die Berechnung der Näherungswerte für den Normaleinheitsvektor

berechnet. So lässt sich die Forderung umsetzen, dass sich die Vektoren \vec{a} und \vec{b} weit entfernt voneinander auf der Ebene befinden. Nach Bildung des Kreuzproduktes und der anschließenden Normierung werden die Parameter des Normaleinheitsvektors an den Ausgleichsalgorithmus mit (nA, nB, nC) übergeben. Abbildung 24 zeigt den Aufruf der Funktion im Hauptprogramm.


```

File Edit Text Go Cell Tools Debug Desktop Window Help
Stack: Base
- 1.0 + ÷ 1.1 × % %
41     **** Näherungswerte
42     **** Normaleinheitsvektor und Abstand d0
43
44 -   [nA, nB, nC, d0] = NaeherungNormeinheitsvektorFcn (E, N, Z, xS, yS, zS) ;
45 -   XO = [nA; nB; nC; d0]
46
47 -   [Probe] = ProbeFcn (E, N, Z, xS, yS, zS, nA, nB, nC) ;

```

Abbildung 24: Aufruf der Function NaeherungNormeinheitsvektorFcn

Die Lage der Vektoren a und b in Bezug auf die gemessene Ebene zeigt die Abbildung 25.

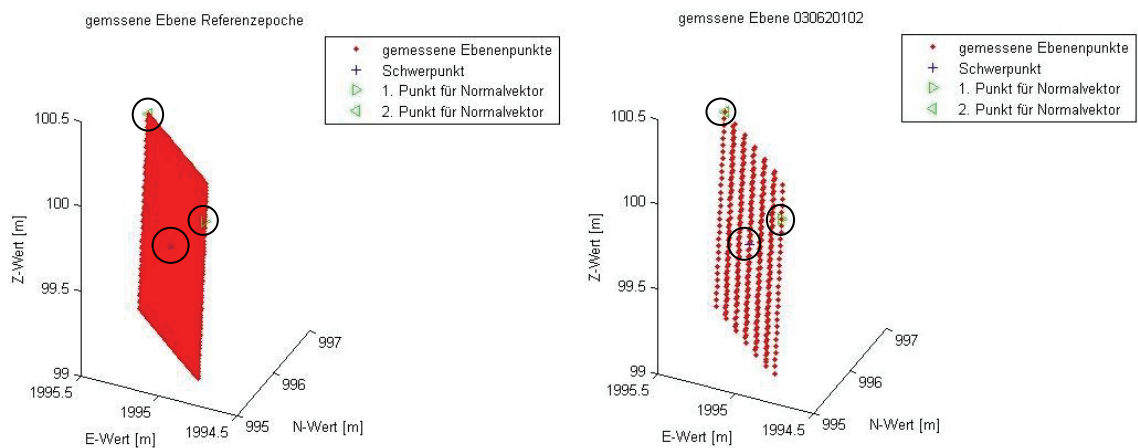


Abbildung 25: Grafik links enthält alle gemessenen Punkte, Grafik rechts nur jeden zehnten, beide zeigen den berechneten Schwerpunkt und die Punkte des Normalvektors

Es folgt die Berechnung des Widerspruchvektors w . Der Aufbau des funktionalen Modells beginnt mit der Designmatrix A , gefolgt von der Modellmatrix B .

```

File Edit Text Go Cell Tools Debug Desktop Window Help
Stack: Base
- 1.0 + ÷ 1.1 × % %
1     function[A] = DesignmatrixFcn (E, N, Z)
2 -   A = [E N Z];
3 -   a = ones (length (E), 1);
4 -   A = cat (2, A, a);

```

Abbildung 26: Erstellen der Designmatrix A

The image shows three screenshots of MATLAB code. The first screenshot shows the definition of the function `ModellmatrixFcn` which takes `n`, `nA`, `nB`, and `nC` as inputs and returns matrix `B`. The second screenshot shows the definition of the function `CFcn` which takes `nA`, `nB`, and `nC` as inputs and returns matrix `C`. The third screenshot shows a main script that defines matrices `A`, `B`, and `C` and calls the `CFcn` function.

```

1  function[B]=ModellmatrixFcn(n, nA, nB, nC)
2  -   B(n/3,n)=0;
3  -   for i=1:n/3
4  -       B(i,1+(i-1)*3)=nA;
5  -       B(i,2+(i-1)*3)=nB;
6  -       B(i,3+(i-1)*3)=nC;
7  -   end

1  function[C]=CFcn(nA, nB, nC)
2  -   C(1,1)=2*nA;
3  -   C(1,2)=2*nB;
4  -   C(1,3)=2*nC;
5  -   C(1,4)=0;

53  %%% Designmatrix A
54
55  -   [A]=DesignmatrixFcn(E,N,Z);
56
57  %%% Modellmatrix B
58
59  -   [B]=ModellmatrixFcn(n, nA, nB, nC);
60
61  %%% C-Matrix
62
63  -   [C]=CFcn(nA, nB, nC);

```

Abbildung 27: Erstellen der Modellmatrix *B* (oben), Matrix *C* (Mitte), Aufruf der Funktion im Ausgleichsalgorithmus (unten)

The image shows a screenshot of MATLAB code defining the stochastic model and the cofactor matrix `QLL`. The code includes comments for the stochastic model and the cofactor matrix, and a loop to calculate the elements of `SigmaLL`.

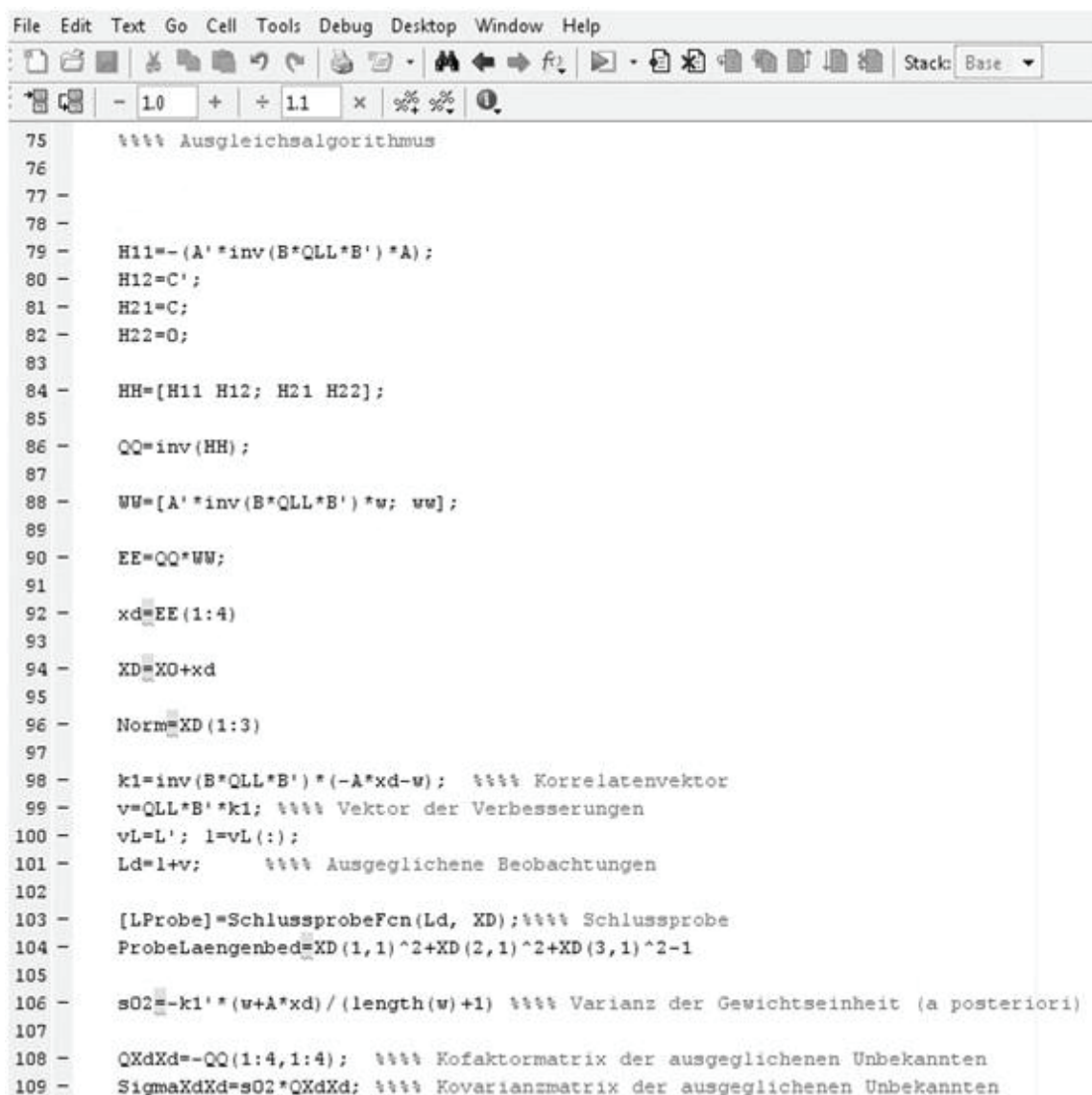
```

55
56  %%% Stochastisches Modell
57  %%% Kovarianzmatrix der Beobachtungen sigmaLL
58
59  -   for i=1:3:n
60  -       SigmaLL(1+(i-1),1+(i-1))=sx;
61  -       SigmaLL(2+(i-1),2+(i-1))=sy;
62  -       SigmaLL(3+(i-1),3+(i-1))=sz;
63  -   end
64
65  %%% Kofaktormatrix der Beobachtungen QLL
66
67  -   QLL=(1/varianz)*SigmaLL;

```

Abbildung 28: Aufstellen des stochastischen Modells

Das stochastische Modell besteht aus der Kovarianzmatrix Σ_{LL} mit den Standardabweichungen $\sigma^2 = 0,5$ mm der Beobachtungen auf der Diagonale. Da aber auch unterschiedliche Standardabweichungen für die Beobachtungen in Betracht kommen, wurde im Nachhinein eine andere Darstellungsmöglichkeit der Matrix gewählt. Hinzu kommt die Kofaktormatrix Q_{LL} , die sich aus dem Reziproken der Varianz multipliziert mit der Kovarianzmatrix ergibt. Das Programmieren des Ausgleichsalgorithmus nach dem Gauß-Helmert-Modell besteht darin, die Normalgleichung aufzulösen und die Elemente der Blockmatrix nacheinander berechnen zu lassen. Die Abbildung 29 enthält alle einzelnen Schritte.



```

75      %%% Ausgleichsalgorithmus
76
77 -
78 -
79 -      H11=-(A'*inv(B*QLL*B')*A);
80 -      H12=C';
81 -      H21=C;
82 -      H22=0;
83
84 -      HH=[H11 H12; H21 H22];
85
86 -      QQ=inv(HH);
87
88 -      WW=[A'*inv(B*QLL*B')*w; w];
89
90 -      EE=QQ*WW;
91
92 -      xd=EE(1:4)
93
94 -      XD=X0+xd
95
96 -      Norm=XD(1:3)
97
98 -      k1=inv(B*QLL*B')*(-A*xd-w); %%% Korrelatenvektor
99 -      v=QLL*B'*k1; %%% Vektor der Verbesserungen
100 -      vL=L'; l=vL(:);
101 -      Ld=l+v; %%% Ausgegliche Beobachtungen
102
103 -      [LProbe]=SchlussprobeFcn(Ld, XD);%% Schlussprobe
104 -      ProbeLaengenbed=XD(1,1)^2+XD(2,1)^2+XD(3,1)^2-1
105
106 -      sO2=-k1'*(w+A*xd)/(length(w)+1) %%% Varianz der Gewichtseinheit (a posteriori)
107
108 -      QXdXd=-QQ(1:4,1:4); %%% Kofaktormatrix der ausgeglichenen Unbekannten
109 -      SigmaXdXd=sO2*QXdXd; %%% Kovarianzmatrix der ausgeglichenen Unbekannten

```

Abbildung 29: Ausgleichsalgorithmus für den Allgemeinfall der Ausgleichsrechnung

Die 'Pause' am Ende bewirkt, dass die Berechnung an der Stelle unterbrochen wird. Mit dem Drücken einer beliebigen Taste, wird die Berechnung fortgesetzt. Zusätzliche Angaben, wie eine Beschreibung der Abbildung und Achsbeschriften können hinzugefügt werden. Einen solchen Plot zeigt die Abbildung 36 im folgenden Kapitel.

9. Präsentation der Ergebnisse

9.1 Genauigkeiten der Ebenenparameter der einzelnen Epochen

Das Scannen der Ebene im Raum 318 ist für alle Messepochen unter gleichen atmosphärischen Bedingungen erfolgt. Die einzige sich ändernde Aufnahmebedingung ist die Verdrehung und Verkippung des Messobjektes über dem Drehtisch. Während der Messung wurde das Objekt jedoch nicht bewegt. Die verschiedenen Aufnahmebedingungen sind im Anhang C des Messprotokolls dokumentiert. Gemessen wurden jeweils 3540 Punkte mit der Rasterweite von 2 cm x 2 cm. Bei der Größe der Punktwolke (3540 Punkte entsprechen 10620 Beobachtungen), die beim Scannen erfasst wurde, werden die Matrizen in Matlab zu groß. Es besteht nicht genügend Speicherplatz, um die Matrizen abzulegen, trotz der Verwendung von Sparsenmatrizen. Die Fehlermeldung „*Out of Memory*.“ erscheint im Command Window. Die Meldung tritt bereits beim Erstellen der Σ_{LL} -Matrix auf. Außerdem ist die Rechnung sehr zeitaufwendig. Deshalb werden im Folgenden die Ebenen nur mit maximal jedem zweiten Punkt und zu Vergleichszwecken bis jeden fünfzigsten Punkt ausgeglichen und gegenübergestellt.

Die Genauigkeiten der Ausgangswerte für die Richtungs- und Streckenmessung liefert das Datenblatt des Trimble S6 HP. Mittels des VFG sind an einem Beispiel (siehe Abbildung 34 und Abbildung 35) die Genauigkeiten der Koordinaten zweier Punkte der Ebene berechnet. Die Standardabweichungen der Beobachtungen für andere Testmessungen und auch für die einzelnen Beobachtungen variieren. Daher werden in der Ausgleichung im stochastischen Modell Σ_{LL} die Standardabweichungen für die einzelnen Messwerte mit 0,5 mm angesetzt. Die Varianz geht mit $\sigma^2 = 1 \cdot 10^{-6} \text{ mm}^2$ in den Ausgleichungsalgorithmus. Die Tabelle 2 zeigt an zwei Beispielen die berechnete Standardabweichung, aufgrund dessen die Standardabweichung im stochastischen Modell für alle Beobachtungen mit 0,5 mm optimistischer angesetzt werden kann.

```

Command Window
Variansfortpflanzungsgesetz

sigmaX =

    0.903396394987843

sigmaY =

    0.441859773540465

sigmaZ =

    0.043399287397734
>>

Editor - D:\6. Semester\Bachelor\MATLAB\BA Ausgleichung Ebene\VFG\VFG.m
File Edit Text Go Cell Tools Debug Desktop Window Help
sigmaS=1+s2*(1*10^(-3)); % Stabw Strecke in mm mit 1mm+1ppm
sigmaR=0.3*0.9; % Stabw Winkel in Grad
F= [sind(z2)*cosd(t2) -s2*sind(z2)*sind(t2) s2*cosd(z2)*cosd(t2); sind(z2)*sind(t2)
SigmaLL=[(sigmaS)^2 0 0; 0 (sigmaR/(180/pi))^2 0; 0 0 (sigmaR/(180/pi))^2];
SigmaXX=F*SigmaLL*F';
sigmaX=(SigmaXX(1,1));
sigmaX=sqrt(sigmaX) % Stabw Y-Koorindate in mm
sigmaY=(SigmaXX(2,2));
sigmaY=sqrt(sigmaY) % Stabw X-Koordinate in mm
sigmaZ=(SigmaXX(3,3));
  
```

Abbildung 34: Standardabweichungen s_d für Prismenmodus

```

Command Window
Variansfortpflanzungsgesetz

sigmaX =

    2.713632266865873

sigmaY =

    1.302747321120573

sigmaZ =

    0.104564153118134
>>

Editor - C:\Users\Doreen\Desktop\Bachelorarbeit\VFG\VFG.m
File Edit Text Go Cell Tools Debug Desktop Window Help
sigmaS=3+s2*(2*10^(-3)); % Stabw Strecke in mm mit 3 mm + 2 ppm
sigmaR=0.3*0.9; % Stabw Winkel in Grad
F= [sind(z2)*cosd(t2) -s2*sind(z2)*sind(t2) s2*cosd(z2)*cosd(t2); sind(z2)*sind(t2)
SigmaLL=[(sigmaS)^2 0 0; 0 (sigmaR/(180/pi))^2 0; 0 0 (sigmaR/(180/pi))^2];
SigmaXX=F*SigmaLL*F';
sigmaX=(SigmaXX(1,1));
sigmaX=sqrt(sigmaX) % Stabw Y-Koorindate in mm
sigmaY=(SigmaXX(2,2));
sigmaY=sqrt(sigmaY) % Stabw X-Koordinate in mm
sigmaZ=(SigmaXX(3,3));
sigmaZ=sqrt(sigmaZ) % Stabw Z-Koordinate in mm
  
```

Abbildung 35: Standardabweichungen s_d für DR-Modus

Die Standardabweichungen für den jeweils selben Punkt verschiedener Testmessungen sind in der folgenden Tabelle 2 für jeweils 3 Messreihen aufgeführt und gegenübergestellt: s_N

Tabelle 2: Standardabweichungen [mm] eines beliebig gewählten Punktes der Ebene im DR-Modus

Dateiname	Punktnummer: 2050			Punktnummer: 1500		
	σ_x	σ_y	σ_z	σ_x	σ_y	σ_z
310520101	2.4465	1.7460	0.1944	2.7136	1.3027	0.1046
010620101	2.4465	1.7460	0.1944	2.7136	1.3027	0.1046
050820102	2.4510	1.7405	0.1904	2.7161	1.2974	0.1105

Die folgenden Abbildung 36 und Abbildung 37 zeigen nochmal die Lage des Punktes auf der Ebene.

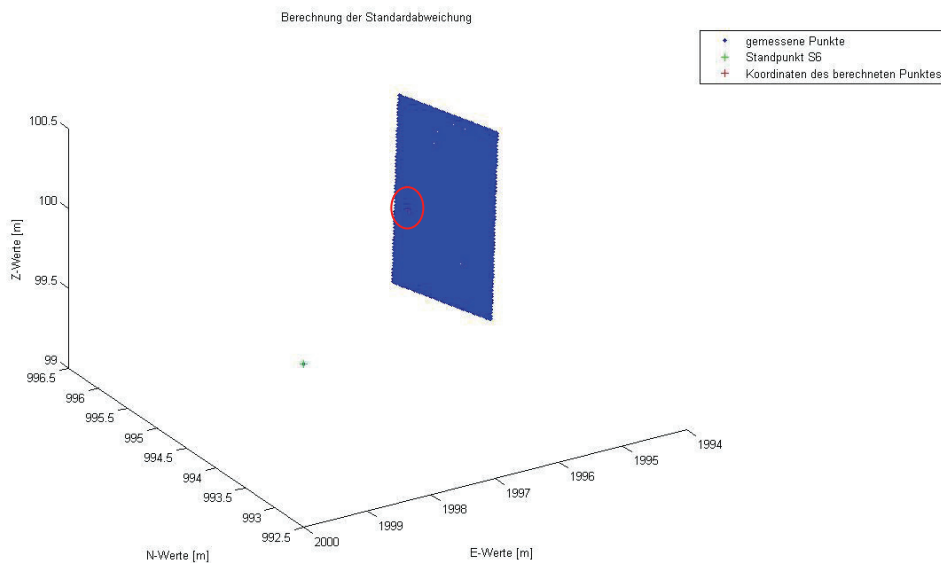


Abbildung 36: Lage des Punktes 2050

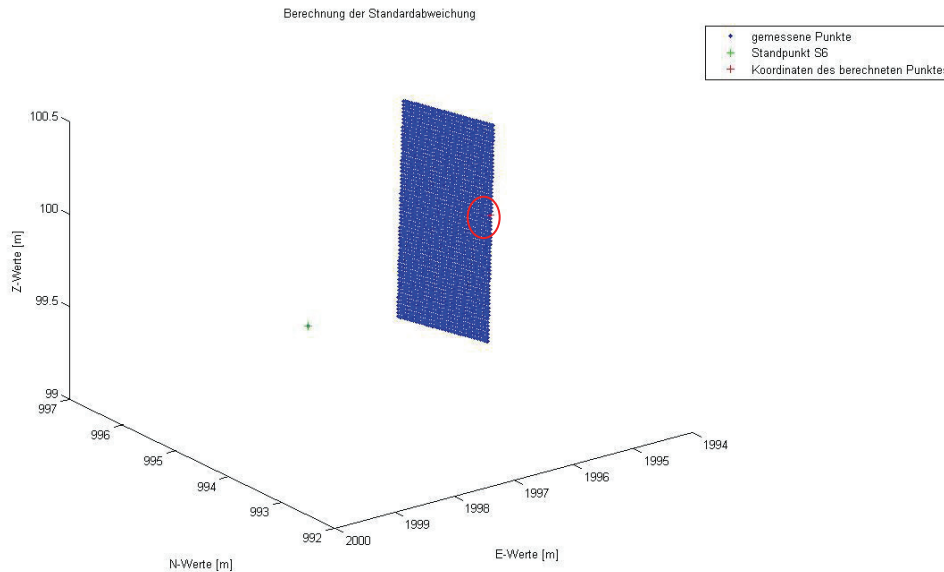


Abbildung 37: Lage des Punktes 1500

Aus den Werten der Standardabweichungen kann abgeleitet werden, dass die innere Messgenauigkeit der einzelnen Testmessungen gleich ist. Wie sie sich auf den Unbekanntenvektor auswirken, soll eine Gegenüberstellung der Standardabweichungen in Tabelle 3 zeigen.

Die Kofaktormatrix der ausgeglichenen Unbekannten enthält das Ergebnis des Schätzverfahrens nach der Ausgleichung. Die einzelnen Kofaktoren $q_{x^{\wedge}x^{\wedge}}$ der Kofaktormatrix $Q_{x^{\wedge}x^{\wedge}}$ bringen die gesamte Korrelation, physikalisch als auch funktional, zum Ausdruck, die der Ausgleichung mit dem mathematischen Modell a priori zu Grunde gelegt wurden. Multipliziert man die Kofaktormatrix mit der Varianz σ_0^2 so erhält man die Kovarianzmatrix der ausgeglichenen Unbekannten $\Sigma_{x^{\wedge}x^{\wedge}}$. Mit dem Einsetzen der Standardabweichungen aus Tabelle 2 ergeben sich für die $\Sigma_{x^{\wedge}x^{\wedge}}$ folgenden Standardabweichungen für den Unbekanntenvektor mit der Varianz $\sigma_0^2 = 1 \cdot 10^{-6} \text{ mm}^2$ und der Rasterweite (RW) 10:

Tabelle 3: Vergleich der Standardabweichungen auf die Ebenenparameter

Dateiname	$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0.5 \text{ mm}$				$\sigma_x = 2.7 \sigma_y = 1.3 \sigma_z = 0.2 \text{ mm}$			
	σ_x [mm]	σ_y [mm]	σ_z [mm]	σ_d [m]	σ_x [mm]	σ_y [mm]	σ_z [mm]	σ_d [m]
310520101	0.0923	0.0565	0.1115	0.2043	0.0923	0.0565	0.1115	0.2043

010620101	0.0923	0.0565	0.1115	0.2043	0.0923	0.0565	0.1115	0.2043
050820102	0.0999	0.0666	0.1228	0.2307	0.0999	0.0666	0.1228	0.2306

Mit geänderter RW auf jeden zweiten Punkt, ergeben sich folgende Punktgenauigkeiten:

Tabelle 4: Vergleich der Standardabweichungen auf die Ebenenparameter

Dateiname	$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0.5 \text{ mm}$				$\sigma_x = 2.7 \sigma_y = 1.3 \sigma_z = 0.2 \text{ mm}$			
	σ_x [mm]	σ_y [mm]	σ_z [mm]	σ_d [m]	σ_x [mm]	σ_y [mm]	σ_z [mm]	σ_d [m]
310520101	0.0407	0.0249	0.0485	0.0902	0.0406	0.0252	0.0485	0.0906
010620101	0.0408	0.0249	0.0485	0.0902	0.0406	0.0252	0.0485	0.0906
050820102	0.0406	0.0252	0.0485	0.0906	0.0456	0.0287	0.0545	0.1024

Die Tabellen zeigen, dass je mehr Punkte der Ebene in die Ausgleichung fließen, desto genauer lassen sich die Unbekannten Parameter bestimmen.

Die Ausgleichung der Referenzepoche mit den Einstellungen: Varianz: $\sigma_0^2 = 1 \cdot 10^{-6} \text{ mm}^2$, RW von 2, Standardabweichungen der Beobachtungen $s = 0.5 \text{ mm}$, hat folgendes Ergebnis geliefert:

Tabelle 5: Ergebnis der Ausgleichung der Referenzepoche

σ_x [mm]	σ_y [mm]	σ_z [mm]	σ_d [m]	\tilde{a} [m]	\tilde{b} [m]	\tilde{c} [m]	\tilde{d} [m]	s_0^2 [mm]
0.0407	0.0249	0.0485	0.0902	-0.5222	0.8518	0.0412	-1183.656	$1.93 \cdot 10^{-6}$

Der \hat{F} -Test nach Kapitel 7.3.1 ergibt, dass die Testgröße 1,93 größer ist als das Quantil. H_A ist anzunehmen. Normalerweise müssten die Werte in der Kovarianzmatrix geändert werden. Andererseits wurde in den Tabellen 3 und 4 gezeigt, dass die angesetzten Genauigkeiten mit $s = 0.5$ mm keine markanten Veränderungen bewirken.

Die Graphiken zeigen die Beobachtungen, die Widersprüche zu den Bedingungen ϕ_1 and ϕ_2 , die Schlussprobe, die Verbesserungen auf die Beobachtungen, die Abweichungen des beobachteten und ausgeglichenen Punktes aus der Ebene.

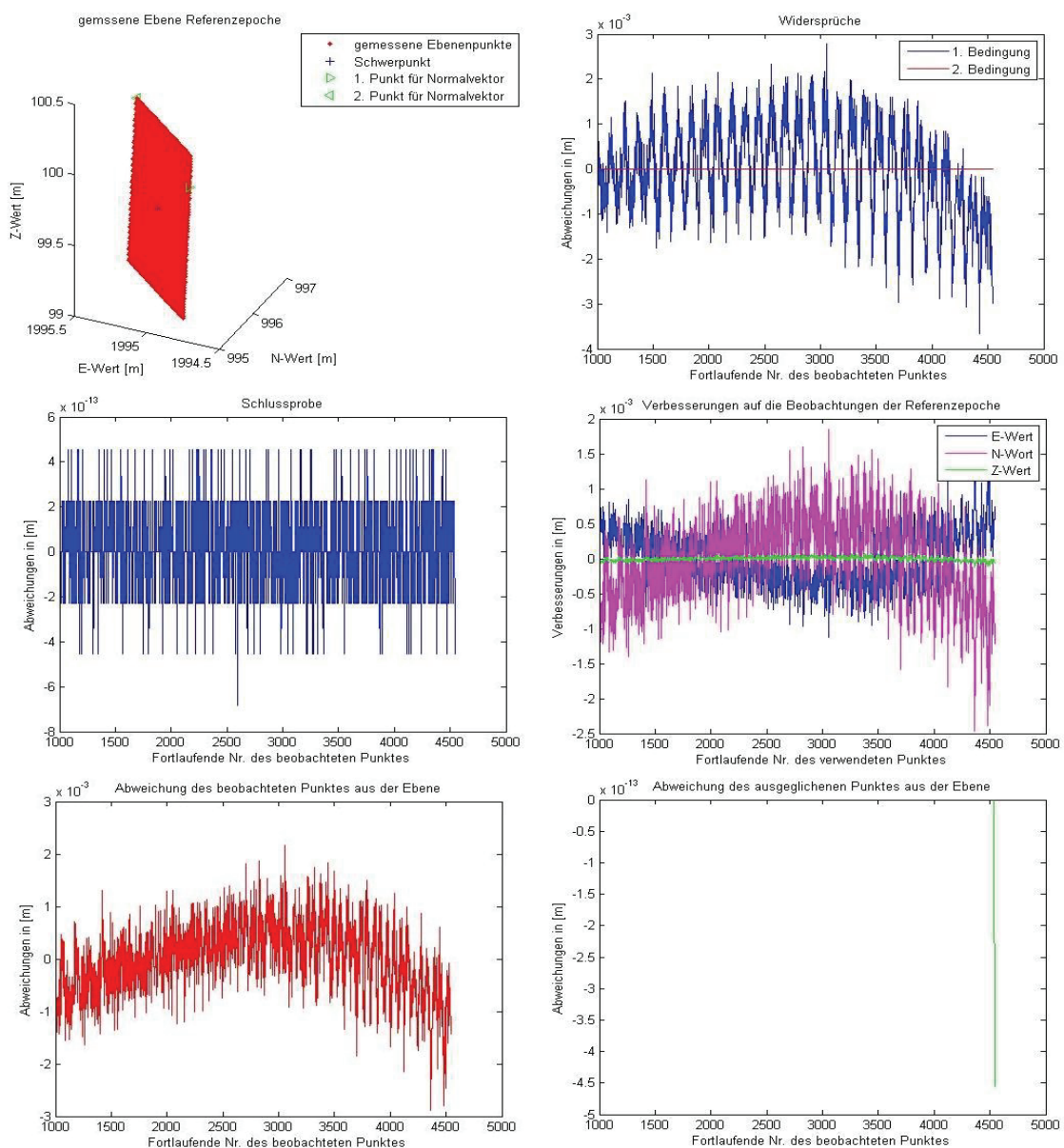


Abbildung 38: Ausgleichung der Referenzepeche

Weitere Plots zu den Folgeepochen befinden sich ebenfalls im Anhang D.

Die Ausgleichungen der Folgeepochen mit denselben Einstellungen sind in den nachstehenden Tabellen zusammengefasst.

Auswertung der Folgeepoche 010620101.dat:

σ_x [mm]	σ_y [mm]	σ_z [mm]	σ_d [m]	\tilde{a} [m]	\tilde{b} [m]	\tilde{c} [m]	\tilde{d} [m]	s_0^2 [mm]
0.0408	0.0249	0.0485	0.0902	-0.5222	0.8518	0.0412	-1183.656	$1.93 \cdot 10^{-6}$

Der \hat{F} - Test ergibt: Testgröße 1,93 > Quantil. H_A annehmen.

Auswertung der Folgeepoche 040620101.dat:

σ_x [mm]	σ_y [mm]	σ_z [mm]	σ_d [m]	\tilde{a} [m]	\tilde{b} [m]	\tilde{c} [m]	\tilde{d} [m]	s_0^2 [mm]
0.0432	0.0267	0.0514	0.0960	-0.5215	0.8515	0.0560	-1185.138	$2.18 \cdot 10^{-6}$

Der \hat{F} - Test ergibt: Testgröße 2,18 > Quantil. H_A annehmen.

Auswertung der Folgeepoche 070620101.dat:

σ_x [mm]	σ_y [mm]	σ_z [mm]	σ_d [m]	\tilde{a} [m]	\tilde{b} [m]	\tilde{c} [m]	\tilde{d} [m]	s_0^2 [mm]
0.0432	0.0267	0.0514	0.0960	-0.0521	0.8515	0.0560	-1185.138	$2.18 \cdot 10^{-6}$

Der \hat{F} - Test ergibt: Testgröße 2,18 > Quantil. H_A annehmen.

Auswertung der Folgeepoche 050820102.dat:

σ_x [mm]	σ_y [mm]	σ_z [mm]	σ_d [m]	\tilde{a} [m]	\tilde{b} [m]	\tilde{c} [m]	\tilde{d} [m]	s_0^2 [mm]
0.0456	0.0287	0.0545	0.1024	-0.5319	0.8446	0.0703	-1162.382	$2.45 \cdot 10^{-6}$

Der \hat{F} - Test ergibt: Testgröße 2,45 > Quantil. H_A annehmen.

Die Ebenenparameter verändern sich mit zunehmender Verstellung des Messobjektes. Dass der Abstand d eine große Standardabweichung aufweist, liegt vermutlich daran, dass der Schätzparameter aus zwei Schätzwerten bestimmt wird, dem Schwerpunkt und dem Normalvektor.

Die Verbesserungen auf die Beobachtungen für die Referenzepoche, als auch für die Folgeepochen, liegen bei werten um +/- 2,5 mm für die N - Komponente. Die E - Komponente weist ähnliche symmetrische Verbesserungen zum N - Wert auf. Die Z - Koordinate zeigt mit kleiner +/- 0,5 mm die geringsten Verbesserungen auf. Die Verbesserungen entsprechend den gezeigten Standardabweichungen für die Ebenenparameter.

Die Betrachtung der Orientierungsunbekannte (siehe Abbildung 39) mit den Werten von 6,9 mgon bis 9,6 mgon wirft die Frage auf, welche Auswirkung diese auf die Ebene und ihren Normalvektor hat. In Kapitel 3.2 wurde gesagt, dass die Orientierungsunbekannte der Winkel zwischen dem Teilkreisnullpunkt und der Nordrichtung ist. Auf die kurze Distanz von etwa 6 m ergibt sich eine Lageabweichung von etwa 0,7 mm bis 1mm. Diese Lageabweichung wirkt sich auf jeden Punkt der Ebene innerhalb der jeweiligen Epoche gleichermaßen aus. Sie hat also zunächst keine Auswirkung auf die Geometrie der Ebene, und auch nicht auf deren Normalvektor. Weil aber in der Praxis vor jeder Messung das Instrument neu aufgestellt und orientiert wird, liefert dies für jede erneute Positionierung auch eine andere Orientierungsunbekannte. Daraus ergeben sich zusätzliche Differenzen zwischen den Folgeepochen zur Referenzepoche. Auch für die experimentelle Messung ließ sich der Effekt nicht vermeiden, da die Laufzeit eines Akkus gerade ausreichend für eine Messung war. Möglich wär es gewesen, mit einer externen Stromversorgung, dies zu umgehen. Auch die Stationierung in zwei Fernrohlagern und die anschließende Mittelbildung der Messwerte der Richtungen führt zur Fehlereliminierung. Die innere Genauigkeit des

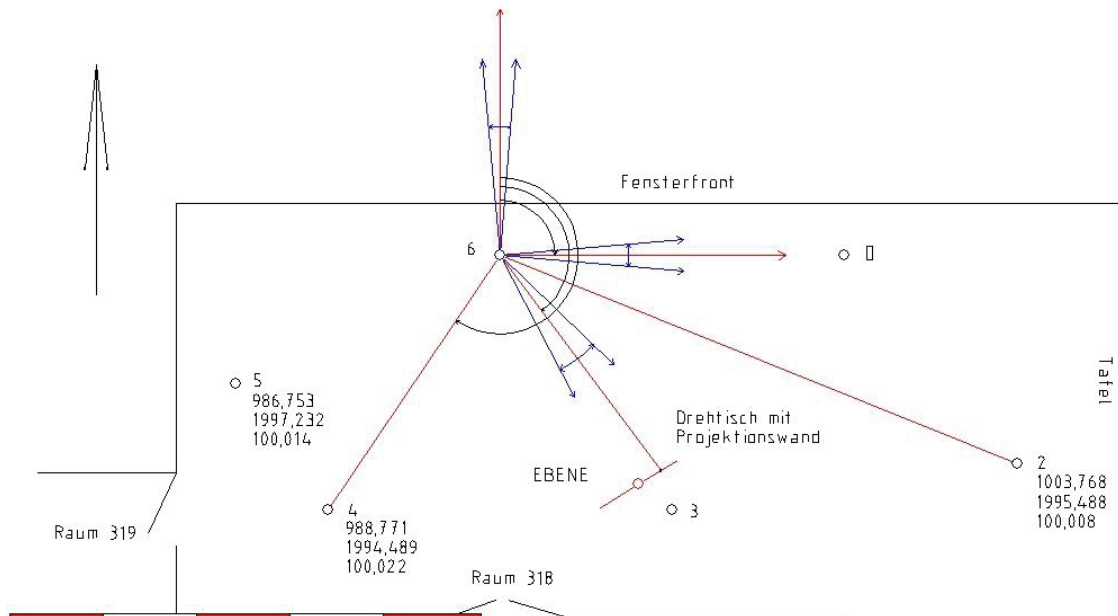


Abbildung 39: Orientierungsunbekannte

Normalvektors bleibt ohne Einfluss. Für die absolute Genauigkeit, beim Vergleich zweier Normalvektoren, lässt sich sagen, dass die Größenordnung der Orientierungsunbekannten in etwa gleich ist. Das lässt schließen, dass der Einfluss sich wiederum gering auswirkt.

9.2 Prüfen der Neigungsänderung auf Signifikanz

Jede Testmessung wurde mit einem Raster von 2 cm x 2 cm gescannt. Die Ausgleichung der Referenzepoche und der Folgeepochen erfolgt zu Vergleichszwecken mit verschiedenen Rasterweiten. Die folgenden Tabellen demonstrieren Ergebnisse unterschiedlicher Epochen mit zwei verschiedenen Rasterweiten (RW2 und RW 10). Da hier nicht alle einzeln aufgeführt werden können, befinden sich weitere Epochenvergleiche im Anhang D. Auf weitere Vergleiche zwischen der Referenzepoche und der ersten als auch letzten Epoche wird verzichtet, da feststeht, dass in dem Bereich keine beziehungsweise definitiv Veränderungen auftreten, wie Tabelle 6 beweist. Es sollen im Folgenden die geringste signifikante Bewegung aufgedeckt werden.

Tabelle 6: Ausgeglichener Normaleinheitsvektor (Norm) der Referenzeпоche im Vergleich zu den Folgeepochen, RW 2

RW 2, $\sigma_0^2=1 \cdot 10^{-6} \text{ mm}^2$ $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0.5 \text{ mm}$					
Epoche	Norm	Winkel [gon]	Test \hat{F} nach Kapitel 7.3.2	Test \hat{y} nach Kapitel 7.3.3	Signifikanz
0.	-0.52221				
	0.85183				
	0.04121				
1.	-0.52221	0.0000	0.72	0	keine
	0.85183				
	0.04121				
3.	-0.52210	0.0000	1.00	0	keine
	0.85189				
	0.04121				
4.	-0.52221	0.0000	1.00	0	keine
	0.85183				
	0.04121				
5.	-0.52140	0.03225	1.23	6.35	Ja
	0.85148				
	0.05603				
6.	-0.52145	0.02876	1.13	10.26	ja
	0.85146				
	0.05560				

7.	-0.53198	0.76463	0.93	242.99	Ja
	0.84460				
	0.07031				

Tabelle 7: Ausgeglichener Normaleinheitsvektor (Norm) der Referenzepeche im Vergleich zu den Folgeepochen, RW 10

RW 10, $\sigma_0^2=1\cdot 10^{-6}$ mm ² $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0.5$ mm					
Epoche	Norm	Winkel [gon]	Test \hat{F} nach Kapitel 6.3.2	Test \hat{y} nach Kapitel 6.3.3	Signifikanz
0.	-0.52210				
	0.85189				
	0.04121				
1.	-0.52210	0.0000	1.00	0.00	keine
	0.85189				
	0.04121				
3.	-0.52210	0.0000	1.00	0.00	keine
	0.85189				
	0.041210				
4.	-0.52210	0.0000	1.00	0.00	keine
	0.85189				
	0.04121				
5.	-0.52140	0.02410	1.16	3.77	ja
	0.85184				
	0.05603				

6.	-0.52140	0.02410	1.16	3.77	ja
	0.84714				
	0.05613				
7.	-0.52312	0.65451	0.92	108.20	ja
	0.84452				
	0.01195				

Die Werte in den Tabellen 6 und 7 und in den Anhängen zeigen, dass ein enges Raster eine Signifikanz des Winkels ab etwa $\Delta\mu > 30$ mgon zeigen. Sobald das Raster mit größerer Rasterweite ausgewertet wird, sind die Parameter mit weniger Beobachtungen ausgeglichen und der Winkel für die Signifikanz wird kleiner $\Delta\mu > 20$ mgon. Epoche 4 zeigt noch keine Hinweise auf Deformationen. Im Gegensatz dazu, fällt ab Epoche 5 auf, dass die Winkel, im Vergleich zur Referenzeпоche mit gleicher Rasterweite, sich stark verändern.

RW 2: $\alpha = 0.03225$ gon \rightarrow signifikante Veränderung

RW 5: $\alpha = 0.03245$ gon \rightarrow signifikante Veränderung

RW 10: $\alpha = 0.02410$ gon \rightarrow signifikante Veränderung

RW 20: $\alpha = 0.03193$ gon \rightarrow signifikante Veränderung

RW 50: $\alpha = 0.01918$ gon \rightarrow keine signifikante Veränderung, > 20 mgon

Die Differenz der beiden Messepochen 4 und 5 liegt bei HZ = 3' und VZ = 1°. In Bezug zur Referenzeпоche liegen die Differenzen bei HZ = 3' und VZ = 1° bzw. 2°. Um eine minimal signifikante Bewegung aufzudecken, ist es sinnvoll, weitere Einstellungen der Ebene zu messen. Dabei sind Einstellungen, die zwischen den Werten liegen und $< VZ = 1^\circ$ sind, zu wählen. Erst mit weiteren Messungen kann eine konkretere Aussage getroffen werden. Die Plots im Anhang D visualisieren die Ebeneneinstellungen für die verschiedenen Epochen zueinander.

Unter der Betrachtung, dass die Ausgleichung der Ebene mit einer Rasterweite von 2 genauer ist, somit einer höheren Auflösung entspricht, würde eine tatsächliche Signifikanz erst bei einem Winkel von ca. 30 mgon auftreten.

Erst mit einem sehr groben Raster von 50 für Referenz- und Folgeepoche, erfolgt eine verspätete Warnung. Hier kann nur eine schlechtere Beurteilung der wenigen Beobachtungen erfolgen.

Im Prinzip gehen aber keine Information verloren, solange nicht eine übertriebene oder unüberlegte Ausdünnung des Rasters vorgenommen wird. Die Wahl des Rasters sollte schon gut überlegt sein in Abhängigkeit der zu erwartenden Veränderungen des Messobjektes. Um sicher zu gehen, ist immer ein feines Raster zu wählen. Dadurch lassen sich die Ebenenparameter genauer und sicherer bestimmen.

Eine weitere Möglichkeit besteht darin, für die Referenzepoche und die Folgeepochen verschiedene Rasterweiten zu wählen, auszugleichen und anschließend die Differenz der Normalvektoren zu vergleichen. Im Anhang finden Sie dazu entsprechende Vergleiche zwischen der Nullepoche und den Epochen 3 und 4. Auch hier bestätigt sich die Angabe von 30 mgon.

Eine genaue Aussage über die kleinstmögliche aufdeckbare Veränderung oder Bewegung der Ebene kann hier letztendlich nicht getroffen werden. Dazu sind weitere Messungen notwendig.

9.3 Vergleiche zu anderen Programmen

Laserscanner, die üblicherweise für Scanverfahren eingesetzt werden, liefern dreidimensionale Punktwolken. Um diese auszuwerten stehen den Nutzern der Leica- Scan- Station die Auswertesoftware 'Cyclone' zur Verfügung. Die Firma Geomagic bietet das gleichnamige Programm 'Geomagic' zur Auswertung von 3D-Scan-Daten an. Damit sind Rückführungen in präzise digitale 3D-Modelle und die Umwandlung der 3D-Scan-Daten in parametrische Modelle möglich. Die Referenzepoche der Testmessungen mit der Trimble S6 Totalstation wurden mit beiden Programmen ausgeglichen. Die Normalvektoren stimmen überein. Die Ergebnisse sind im Anhang C zu finden.

Weitere Standardsoftware für die Ausgleichung von Vermessungen, wie beispielsweise die 'Cremer'- Software und 'Kafka' stellen Tools für Ausgleichungs-

probleme mit Bedingungen zu Verfügung. Die Punkte der Referenzepoche in Cremer einzulesen war schon sehr zeitaufwendig. Die bedingte Ausgleichung als Ebene mit allen Punkten dauerte ebenfalls sehr lange. Im Anhang befinden sich zwei Auszüge aus der Ausgleichung mit Cremer, die erste mit einem geringen Anteil von Punkten, die zweite mit allen Punkten. Die Normalvektoren weisen entsprechende Unterschiede auf.

10. Resümee

Praxis und Theorie sind stets differenziert zu betrachten. Im Rahmen der Bachelor-Arbeit konnten die bestmöglichen Bedingungen für die Testmessungen geschaffen werden, während in der Praxis, der Messung vor Ort, auf unvorhergesehene Probleme gestoßen werden kann. Unter Berücksichtigung der unter Kapitel 2.3 genannten Fehlereinflüsse müssen günstige Standortbedingungen für das Instrument während des Aufnahmeverfahrens gegeben sein. Anschlusspunkte und Netzeinbindungen sind in Hinsicht auf ihre Genauigkeiten zu prüfen. So sind auch Verschiebungen der Anschlusspunkte in Betracht zu ziehen und die Trennung stabiler und instabiler Stützpunkte erforderlich. Andernfalls hat dies falsche Interpretationen der Auswertung zur Folge.

Die Wahl eines geeigneten Verfahrens zur Deformationsanalyse erfolgt unter der Betrachtung der Genauigkeiten, Zeitaufwand, Kosten, Nutzen und der Wirtschaftlichkeit. Für die volle Ausnutzung der heute zur Verfügung stehenden Messtechnik lässt sich dennoch ein tachymetrisches Laserscanning für die Bauwerksüberwachung einsetzen.

Das Messen mit einer Totalstation mit integrierter Scanoption hat einige Vorteile. Beispielsweise lassen sich für strenge Varianzfortpflanzung die Messgenauigkeiten der Herstellerangaben verwenden. Die Instrumentenprüfung kann auf die herkömmlich bekannte Weise durchgeführt werden. Zusätzlich lassen sich die Instrumente einfach stationieren und die Messung ist mit dem direkten Bezug zur Lotrichtung möglich. Ein Nachteil, den das Verfahren mit sich bringt, liegt in der Dauer der Messzeit. Die Messgeschwindigkeit ist gering, und für große Punktwolken dementsprechend Zeitintensiv, in Abhängigkeit der Feinheit des Aufnahmerasters. Eine Einschränkung auf kleine Messobjekte mit geringer Ausdehnung sollte dann in Erwägung gezogen werden, sodass die Wirtschaftlichkeit gegeben ist. Da steile Visuren beim Scanverfahren zu vermeiden sind, lassen sich bestenfalls Objekte geringerer Höhe messen.

Auf dem Markt gibt es Ausgleichungssoftware, wie beispielsweise Xdesy und qtoctave. Xdesy besitzt unter Anderem die Möglichkeit der Ausgleichung geodätische Netze und weiterhin der Ausgleichung unter Berücksichtigung geometri-

scher Bedingungen, zum Beispiel die der Ebene. Qt octave ist MATLAB sehr ähnlich und arbeitet auch größtenteils mit den gleichen Befehlen. Auch hiermit ist das Lösen linearer und nichtlinearer Gleichungssystem möglich. Beide Programme besitzen einen großen Funktionsumfang und stehen kostenlos zum Download im Internet zur Verfügung.

Literaturverzeichnis

Behrens, Jörn, und Armin Iske. *Matlab - Eine freundliche Einführung*. 26. Februar 1999. <http://www-m3.ma.tum.de/m3old/ftp/matlab.pdf> (Zugriff am 4. Juli 2010).

Benning, Wilhelm. *Statistik in Geodäsie, Geoinformation und Bauwesen*. Heidelberg: Herbert Wichmann Verlag, 2007.

Deumlich, Fritz, und Rudolf Staiger. *Instrumentenkunde der Vermessungstechnik*. Heidelberg: Wichmann Verlag, 2002.

Foppe, Karl. *Repetitorium zur Fehlerlehre und Statistik und Ausgleichsrechnung*. Neubrandenburg: GFG - Gesellschaft zur Förderung der Geodäsie an der HS NB e. V., 2009.

Geomagic. „Geomagic.com.“ <http://www.geomagic.com/de/products/> (Zugriff am 11. September 2010).

Gramlich, Günter M. „Eine Einführung in Matlab aus Sicht eines Mathematikers.“ 24. Februar 2010. <http://www.hs-ulm.de/gramlich> (Zugriff am 20. Juli 2010).

Hennecke, Fritz, Gerhard Müller, und Hans Werner. *Handbuch Ingenieurvermessung - Grundlagen*. Bd. I. Heidelberg: Wichmann, 1994.

Jäger, Reiner, Tilman Müller, Heinz Saler, und Rainer Schwäble. *Klassische und robuste Ausgleichsverfahren - Ein Leitfaden für Ausbildung und Praxis von Geodäten und Geoinformatikern*. Heidelberg: Wichmann, 2005.

Kahmen, Heribert. *Angewandte Geodäsie - Vermessungskunde*. Berlin: de Gruyter, 2006.

Klimke, Andreas. *matlab-intro.pdf*. 17. April 2002. <http://www.math.tu-clausthal.de/Studium/Vorlesungen/SS05/ComputerPraktikum/matlab-intro.pdf> (Zugriff am 30. Juni 2010).

Köhler, Joachim, Rolf Höwelmann, und Hardt Krämer. *Analytische Geometrie in vektorieller Darstellung*. Frankfurt am Main: Verlag Moritz Diesterweg, 1974.

Kulle, Bettina. „Nichtparametrisches Behren-Fisher-Problem im Mehr-Stichprobenfall.“ *ams.med.uni-goettingen.de*. 1999. <http://www.ams.med.uni-goettingen.de/amsneu/download/diplom/Kulle.pdf> (Zugriff am 14. September 2010).

Leica-Geosystems. „Leica-Geosystems.com.“ www.leica-geosystems.com/.../Leica-Cyclone (Zugriff am 11. September 2010).

Lenzmann, Lothar, und Enno Lenzmann. „Strenge Auswertung des nichtlinearen Gauß-Helmert-Modells.“, 2003.

<http://ki-portal.de/ai/resources/756dafa4425.pdf> (Zugriff am 18. August 2010).

Matthias, Herbert J. „Bedeutung und Konstruktion von Kovarianzen in der Messtechnik.“ *Institut für Geodäsie und Photogrammetrie an der Eidg. Technischen Hochschule Zürich*, September 1992.

Möser, Michael, Gerhard Müller, Harald Schlemmer, und Hans Werner. *Handbuch Ingenieurgeodäsie - Auswertung geodätischer Überwachungsmessungen*. Bd. III. Heidelberg: Wichmann, 2000.
Handbuch Ingenieurvermessung - Grundlagen. Bd. I. Heidelberg: Wichmann, 2000.

Neitzel, Frank. „Ausgleichsrechnung - Modellbildung, Auswertung, Qualitätsbeurteilung.“
Fortbildungsseminar: Qualitätsmanagement geodätischer Mess- und Auswerteverfahren. Hannover: Tagungsband DVW, 2010.

Neitzel, Frank, und Lars Johannes. „Anwendung des tachymetrischen Laserscannings in der Überwachung eines historischen Bauwerkes.“ Oldenburg, 2009.

Niemeier, Wolfgang. *Ausgleichsrechnung - statistische Auswertungsmethoden*. Berlin: de Gruyter, 2008.
Ausgleichsrechnung. Berlin: de Gruyter, 2002.

Nitschke, Martin. „Bachelor VM/GI, B107 Mathematik 2 Matalb-Kurs.“ Hochschule Neubrandenburg: University of Applied Sciences, 14. April 2008.

Rietdorf, Andreas, und Arne Schulze. „Untersuchung zur geodätischen Vermessung von Konvertern der Stahwerke Bremen GmbH.“ *Diplomarbeit*. Hannover: Geodätisches Institut der Universität Hannover, Juli 1998.

Trimble Geomatics and Engineering Division. „Trimble Totalstationen S-Serie Benutzerhandbuch.“ Ohio, USA, 2005.

Trimble Integrated Surveying Group. „<http://www.wichmann-verlag.de/ai/resources/bd0eb197b91.pdf>.“ 2004. <http://www.wichmann-verlag.de/ai/resources/bd0eb197b91.pdf> (Zugriff am 10. September 2010).

Universität Kiel. *uni-kiel.de*. http://www.uni-kiel.de/rz/rzi/rzi_9402/subsectionstar3_6_2.html (Zugriff am 30. Juni 2010).

Witte, Bertold, und Hubert Schmidt. *Vermessungskunde und Grundlagen der Statistik für das Bauwesen*. Stuttgart: Wittwer, 2000.

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: 'Intervall Hz V' (Trimble Geomatics and Engineering Division 2005)	9
Abbildung 2: Rechtwinklige Ebene (Trimble Geomatics and Engineering Division 2005)	10
Abbildung 3: Linie und Offset (Trimble Geomatics and Engineering Division 2005)	10
Abbildung 4: Strahldivergenz	13
Abbildung 5: Prinzip des Phasenvergleichsverfahrens (Möser u.a.:	14
Abbildung 6: Prinzip des Impulsverfahrens (Deumlich und Staiger 2002)	14
Abbildung 7: Inkrementelles Punktraster (Kahmen 2006)	16
Abbildung 8: Messungsaufbau Raum 318, Lehrgebäude 2 der Hochschule Neubrandenburg	17
Abbildung 9: Foto mit Ansicht des Messungsaufbaus im Raum 318	18
Abbildung 10: Drehtisch mit Kurbeln und Ableseeinrichtungen	19
Abbildung 11: Zeiss M5-Dateiformat	21
Abbildung 12: Parameterdarstellung der Ebene (Köhler, Höwelmann und Krämer 1974)	22
Abbildung 13: Dreipunktegleichung (Köhler, Höwelmann und Krämer 1974)	23
Abbildung 14: Punkt-Normalform in vektorieller Darstellung (Köhler, Höwelmann und Krämer 1974)	24
Abbildung 15: Darstellung des Normalvektors der Ebene (Köhler, Höwelmann und Krämer 1974)	26
Abbildung 16: Schnittwinkel zwischen Ebenen abgeleitet aus Schnittwinkeln zwischen Geraden (Köhler, Höwelmann und Krämer 1974)	27
Abbildung 17: Zunahme der Testgüte $\lambda_2 > \lambda_1$ wenn bei gleichbleibender Nichtzentralität λ mit $\alpha_2 > \alpha_1$ die Irrtumswahrscheinlichkeit erhöht wird (Neitzel, Ausgleichsrechnung - Modellbildung, Auswertung, Qualitätsbeurteilung 2010)	40
Abbildung 18: MATLAB Arbeitsoberfläche	47
Abbildung 19: Aufrufen einer Function in MATLAB	48
Abbildung 20: Erstellen einer Funktion in MATLAB	49
Abbildung 21: Beispiel für eine Sparsenmatrix	49
Abbildung 22: Beispiel, wie Werte einer Sparsenmatix effektiv abgespeichert werden	50
Abbildung 23: Function für die Berechnung der Näherungswerte für den Normaleinheitsvektor	51
Abbildung 24: Aufruf der Function NaeherungNormeinheitsvektorFcn	52
Abbildung 25: Grafik links enthält alle gemessenen Punkte, Grafik rechts nur jeden zehnten, beide zeigen den berechneten Schwerpunkt und die Punkte des Normalvektors	52
Abbildung 26: Erstellen der Designmatrix A	52
Abbildung 27: Erstellen der Modelmatrix B (oben), Matrix C (Mitte), Aufruf der Funktion im Ausgleichsalgorithmus (unten)	53
Abbildung 28: Aufstellen des stochastischen Modells	53
Abbildung 29: Ausgleichsalgorithmus für den Allgemeinfeld der Ausgleichsrechnung	54
Abbildung 30: Testgröße	55
Abbildung 31: Berechnung des Winkels zwischen den Normaleinheitsvektoren	55
Abbildung 32: Signifikanztest des Winkels zwischen den Normaleinheitsvektoren	56
Abbildung 33: Erstellen eines Plots	56
Abbildung 34: Standardabweichungen s_d für Prismenmodus	59
Abbildung 35: Standardabweichungen s_d für DR-Modus	59
Abbildung 36: Lage des Punktes 2050	60
Abbildung 37: Lage des Punktes 1500	61

Abbildung 38: Ausgleichung der Referenzepoche	63
Abbildung 40: Orientierungsunbekannte	66

Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Zusammenstellung statistischer Testverfahren (Neitzel, Ausgleichsrechnung - Modellbildung, Auswertung, Qualitätsbeurteilung 2010)	39
Tabelle 2: Standardabweichungen [mm] eines beliebig gewählten Punktes der Ebene im DR-Modus	60
Tabelle 3: Vergleich der Standardabweichungen auf die Ebenenparameter	61
Tabelle 4: Vergleich der Standardabweichungen auf die Ebenenparameter	62
Tabelle 5: Ergebnis der Ausgleichung der Referenzepoche	62
Tabelle 6: Ausgeglicherer Normaleinheitsvektor (Norm) der Referenzepoche im Vergleich zu den Folgeepochen, RW 2	67
Tabelle 7: Ausgeglicherer Normaleinheitsvektor (Norm) der Referenzepoche im Vergleich zu den Folgeepochen, RW 10	68

Formelverzeichnis

Formel 1: Punktrichtungsgleichung	23
Formel 2: Dreipunktgleichung	23
Formel 3: Koordinatengleichung	24
Formel 4: Punkt-Normalform in vektorieller Darstellung	24
Formel 5: Allgemeine Normalform	25
Formel 6: Ebenengleichung in vektorieller Schreibweise	25
Formel 7: Normaleinheitsvektor	25
Formel 8: Hessesche Normalform einer Ebene (HNF)	26
Formel 9: Hessesche Normalform in Koordinatenform	27
Formel 10: Schnittwinkel zwischen Normalvektoren	27
Formel 11: Schnittwinkel zwischen Ebenen	27
Formel 12: Schwerpunkt der Ebene	32
Formel 13: Kreuzprodukt zweier Vektoren	32
Formel 14: Näherungswert für d	32
Formel 15: Bedingungsgleichung 1	33
Formel 16: Bedingungsgleichung 2	34
Formel 17: Probe	34
Formel 18: Kovarianzmatrix der Beobachtungen	34
Formel 19: Kofaktormatrix der Beobachtungen	35
Formel 20: Matrix A	35
Formel 21: Matrix B	35
Formel 22: Matrix C	35

Anhang

Anhang A – Messprotokoll

Anhang B –Tabelle der *F*-Verteilung

Tabelle der 'Standard - Normalverteilung'

Anhang C – Bilder zu Cyclone, Geomagic, Cremer

**Anhang D – Vergleiche zwischen Referenz- und Folgeepochen
unterschiedlicher Rasterweiten (Tabellen, Bilder)**

Anhang E – Inhalt der CD

Anhang A

Protokoll zur Messung für die Deformationsanalyse im Rahmen der Bachelor-Arbeit

an der Hochschule Neubrandenburg im Lehrgebäude 2, Raum 318

Instrument: Trimble S6 HP

Messungen durchgeführt von Mai bis August 2010 von Doreen Schleuder

Rasterweite: 2 cm x 2 cm

Epoche	Dateiname		Nullstellung der Ebene		Orientierungs- unbekannte [mgon]
			161°6'31"	0°59'05"	
			Einstellung für Folgemessungen		
			Hz	Vz	
0.	31052010	1	161°6'31"	-	7,4
1.	01062010	1	161°7'31"	-	6,8
2.	01062010	2	161°8'31"	-	7,5
3.	03062010	1	161°9'32"	-	6,8
4.	03062010	2	161°6'31"	1°59'05"	7,9
5.	04062010	1	161°9'31"	2°59'05"	7,7
6.	07062010	1	161°9'32"	3°59'05"	7,7
7.	05082010	1	160°30'46"	0°59'42"	8,4
8.	05082010	2	160°29'14"	3°59'05"	9,6
9.	05082010	3	160°29'15"	9°11'05"	8,4

Anhang B

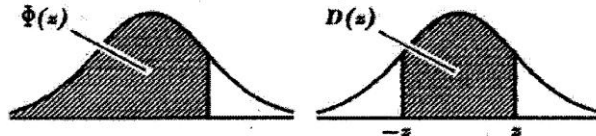
Tabelle für die „Standard-Normalverteilung“

Normalverteilung

Verteilungsfunktion (48.8)

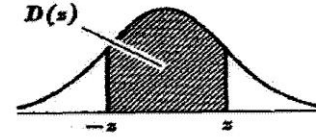
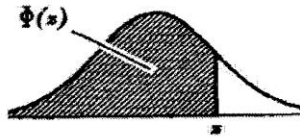
$$D(z) = \Phi(z) - \Phi(-z),$$

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z), \quad \Phi(0) = 0,5$$



z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	$D(z)$	z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	$D(z)$	z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	$D(z)$
0,01	0,4960	0,5040	0,0080	0,51	0,3050	0,6950	0,3899	1,01	0,1562	0,8438	0,6875
0,02	0,4920	0,5080	0,0160	0,52	0,3015	0,6985	0,3969	1,02	0,1539	0,8461	0,6923
0,03	0,4880	0,5120	0,0239	0,53	0,2981	0,7019	0,4039	1,03	0,1515	0,8485	0,6970
0,04	0,4840	0,5160	0,0319	0,54	0,2946	0,7054	0,4108	1,04	0,1492	0,8508	0,7017
0,05	0,4801	0,5199	0,0399	0,55	0,2912	0,7088	0,4177	1,05	0,1469	0,8531	0,7063
0,06	0,4761	0,5239	0,0478	0,56	0,2877	0,7123	0,4245	1,06	0,1446	0,8554	0,7109
0,07	0,4721	0,5279	0,0558	0,57	0,2843	0,7157	0,4313	1,07	0,1423	0,8577	0,7154
0,08	0,4681	0,5319	0,0638	0,58	0,2810	0,7190	0,4381	1,08	0,1401	0,8599	0,7199
0,09	0,4641	0,5359	0,0717	0,59	0,2776	0,7224	0,4448	1,09	0,1379	0,8621	0,7243
0,10	0,4602	0,5398	0,0797	0,60	0,2743	0,7257	0,4515	1,10	0,1357	0,8643	0,7287
0,11	0,4562	0,5438	0,0876	0,61	0,2709	0,7291	0,4581	1,11	0,1335	0,8665	0,7330
0,12	0,4522	0,5478	0,0955	0,62	0,2676	0,7324	0,4647	1,12	0,1314	0,8686	0,7373
0,13	0,4483	0,5517	0,1034	0,63	0,2643	0,7357	0,4713	1,13	0,1292	0,8708	0,7415
0,14	0,4443	0,5557	0,1113	0,64	0,2611	0,7389	0,4778	1,14	0,1271	0,8729	0,7457
0,15	0,4404	0,5596	0,1192	0,65	0,2578	0,7422	0,4843	1,15	0,1251	0,8749	0,7499
0,16	0,4364	0,5636	0,1271	0,66	0,2546	0,7454	0,4907	1,16	0,1230	0,8770	0,7540
0,17	0,4325	0,5675	0,1350	0,67	0,2514	0,7486	0,4971	1,17	0,1210	0,8790	0,7580
0,18	0,4286	0,5714	0,1428	0,68	0,2483	0,7517	0,5035	1,18	0,1190	0,8810	0,7620
0,19	0,4247	0,5753	0,1507	0,69	0,2451	0,7549	0,5098	1,19	0,1170	0,8830	0,7660
0,20	0,4207	0,5793	0,1585	0,70	0,2420	0,7580	0,5161	1,20	0,1151	0,8849	0,7699
0,21	0,4168	0,5832	0,1663	0,71	0,2389	0,7611	0,5223	1,21	0,1131	0,8869	0,7737
0,22	0,4129	0,5871	0,1741	0,72	0,2358	0,7642	0,5285	1,22	0,1112	0,8888	0,7775
0,23	0,4090	0,5910	0,1819	0,73	0,2327	0,7673	0,5346	1,23	0,1093	0,8907	0,7813
0,24	0,4052	0,5948	0,1897	0,74	0,2296	0,7704	0,5407	1,24	0,1075	0,8925	0,7850
0,25	0,4013	0,5987	0,1974	0,75	0,2266	0,7734	0,5467	1,25	0,1056	0,8944	0,7887
0,26	0,3974	0,6026	0,2051	0,76	0,2236	0,7764	0,5527	1,26	0,1038	0,8962	0,7923
0,27	0,3936	0,6064	0,2128	0,77	0,2206	0,7794	0,5587	1,27	0,1020	0,8980	0,7959
0,28	0,3897	0,6103	0,2205	0,78	0,2177	0,7823	0,5646	1,28	0,1003	0,8997	0,7995
0,29	0,3859	0,6141	0,2282	0,79	0,2148	0,7852	0,5705	1,29	0,0985	0,9015	0,8029
0,30	0,3821	0,6179	0,2358	0,80	0,2119	0,7881	0,5763	1,30	0,0968	0,9032	0,8064
0,31	0,3783	0,6217	0,2434	0,81	0,2090	0,7910	0,5821	1,31	0,0951	0,9049	0,8098
0,32	0,3745	0,6255	0,2510	0,82	0,2061	0,7939	0,5878	1,32	0,0934	0,9066	0,8132
0,33	0,3707	0,6293	0,2586	0,83	0,2033	0,7967	0,5935	1,33	0,0918	0,9082	0,8165
0,34	0,3669	0,6331	0,2661	0,84	0,2005	0,7995	0,5991	1,34	0,0901	0,9099	0,8198
0,35	0,3632	0,6368	0,2737	0,85	0,1977	0,8023	0,6047	1,35	0,0885	0,9115	0,8230
0,36	0,3594	0,6406	0,2812	0,86	0,1949	0,8051	0,6102	1,36	0,0869	0,9131	0,8262
0,37	0,3557	0,6443	0,2886	0,87	0,1922	0,8078	0,6157	1,37	0,0853	0,9147	0,8293
0,38	0,3520	0,6480	0,2961	0,88	0,1894	0,8106	0,6211	1,38	0,0838	0,9162	0,8324
0,39	0,3483	0,6517	0,3035	0,89	0,1867	0,8133	0,6265	1,39	0,0823	0,9177	0,8355
0,40	0,3446	0,6554	0,3108	0,90	0,1841	0,8159	0,6319	1,40	0,0808	0,9192	0,8385
0,41	0,3409	0,6591	0,3182	0,91	0,1814	0,8186	0,6372	1,41	0,0793	0,9207	0,8415
0,42	0,3372	0,6628	0,3255	0,92	0,1788	0,8212	0,6424	1,42	0,0778	0,9222	0,8444
0,43	0,3336	0,6664	0,3328	0,93	0,1762	0,8238	0,6476	1,43	0,0764	0,9236	0,8473
0,44	0,3300	0,6700	0,3401	0,94	0,1736	0,8264	0,6528	1,44	0,0749	0,9251	0,8501
0,45	0,3264	0,6736	0,3473	0,95	0,1711	0,8289	0,6579	1,45	0,0735	0,9265	0,8529
0,46	0,3228	0,6772	0,3545	0,96	0,1685	0,8315	0,6629	1,46	0,0721	0,9279	0,8557
0,47	0,3192	0,6808	0,3616	0,97	0,1660	0,8340	0,6680	1,47	0,0708	0,9292	0,8584
0,48	0,3156	0,6844	0,3688	0,98	0,1635	0,8365	0,6729	1,48	0,0694	0,9306	0,8611
0,49	0,3121	0,6879	0,3759	0,99	0,1611	0,8389	0,6778	1,49	0,0681	0,9319	0,8638
0,50	0,3085	0,6915	0,3829	1,00	0,1587	0,8413	0,6827	1,50	0,0668	0,9332	0,8664

Tafel 3a.
Verteilungsfunktion (48.3)
(Fortsetzung)



z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	$D(z)$
1,51	0,0655	0,9345	0,8690
1,52	0643	9357	8715
1,53	0630	9370	8740
1,54	0618	9382	8764
1,55	0606	9394	8789
1,56	0594	9406	8812
1,57	0582	9418	8836
1,58	0571	9429	8859
1,59	0559	9441	8882
1,60	0548	9452	8904
1,61	0537	9463	8926
1,62	0526	9474	8948
1,63	0516	9484	8969
1,64	0505	9495	8990
1,65	0495	9505	9011
1,66	0485	9515	9031
1,67	0475	9525	9051
1,68	0465	9535	9070
1,69	0455	9545	9090
1,70	0446	9554	9109
1,71	0436	9564	9127
1,72	0427	9573	9146
1,73	0418	9582	9164
1,74	0409	9591	9181
1,75	0401	9599	9199
1,76	0392	9608	9216
1,77	0384	9616	9233
1,78	0375	9625	9249
1,79	0367	9633	9265
1,80	0359	9641	9281
1,81	0351	9649	9297
1,82	0344	9656	9312
1,83	0336	9664	9328
1,84	0329	9671	9342
1,85	0322	9678	9357
1,86	0314	9686	9371
1,87	0307	9693	9385
1,88	0301	9699	9399
1,89	0294	9706	9412
1,90	0287	9713	9426
1,91	0281	9719	9439
1,92	0274	9726	9451
1,93	0268	9732	9464
1,94	0262	9738	9476
1,95	0256	9744	9488
1,96	0250	9750	9500
1,97	0244	9756	9512
1,98	0239	9761	9523
1,99	0233	9767	9534
2,00	0228	9772	9545

z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	$D(z)$
2,01	0222	9778	9556
2,02	0217	9783	9566
2,03	0212	9788	9576
2,04	0207	9793	9586
2,05	0202	9798	9596
2,06	0197	9803	9606
2,07	0192	9808	9615
2,08	0188	9812	9625
2,09	0183	9817	9634
2,10	0179	9821	9643
2,11	0174	9826	9651
2,12	0170	9830	9660
2,13	0166	9834	9668
2,14	0162	9838	9676
2,15	0158	9842	9684
2,16	0154	9846	9692
2,17	0150	9850	9700
2,18	0146	9854	9707
2,19	0143	9857	9715
2,20	0139	9861	9722
2,21	0136	9864	9729
2,22	0132	9868	9736
2,23	0129	9871	9743
2,24	0125	9875	9749
2,25	0122	9878	9756
2,26	0119	9881	9762
2,27	0116	9884	9768
2,28	0113	9887	9774
2,29	0110	9890	9780
2,30	0107	9893	9786
2,31	0104	9896	9791
2,32	0102	9898	9797
2,33	0099	9901	9802
2,34	0096	9904	9807
2,35	0094	9906	9812
2,36	0091	9909	9817
2,37	0089	9911	9822
2,38	0087	9913	9827
2,39	0084	9916	9832
2,40	0082	9918	9836
2,41	0080	9920	9840
2,42	0078	9922	9845
2,43	0075	9925	9849
2,44	0073	9927	9853
2,45	0071	9929	9857
2,46	0069	9931	9861
2,47	0068	9932	9865
2,48	0066	9934	9869
2,49	0064	9936	9872
2,50	0062	9938	9876

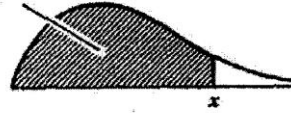
z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	$D(z)$
2,51	0060	9940	9879
2,52	0059	9941	9883
2,53	0057	9943	9886
2,54	0055	9945	9889
2,55	0054	9946	9892
2,56	0052	9948	9895
2,57	0051	9949	9898
2,58	0049	9951	9901
2,59	0048	9952	9904
2,60	0047	9953	9907
2,61	0045	9955	9909
2,62	0044	9956	9912
2,63	0043	9957	9915
2,64	0041	9959	9917
2,65	0040	9960	9920
2,66	0039	9961	9922
2,67	0038	9962	9924
2,68	0037	9963	9926
2,69	0036	9964	9929
2,70	0035	9965	9931
2,71	0034	9966	9933
2,72	0033	9967	9935
2,73	0032	9968	9937
2,74	0031	9969	9939
2,75	0030	9970	9940
2,76	0029	9971	9942
2,77	0028	9972	9944
2,78	0027	9973	9946
2,79	0026	9974	9947
2,80	0026	9974	9949
2,81	0025	9975	9950
2,82	0024	9976	9952
2,83	0023	9977	9953
2,84	0023	9977	9955
2,85	0022	9978	9956
2,86	0021	9979	9958
2,87	0021	9979	9959
2,88	0020	9980	9960
2,89	0019	9981	9961
2,90	0019	9981	9963
2,91	0018	9982	9964
2,92	0018	9982	9965
2,93	0017	9983	9966
2,94	0016	9984	9967
2,95	0016	9984	9968
2,96	0015	9985	9969
2,97	0015	9985	9970
2,98	0014	9986	9971
2,99	0014	9986	9972
3,00	0013	9987	9973

Tabelle für die F -Verteilung mit $\alpha = 95\%$

F -Verteilung

95%

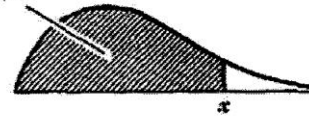
Werte von x , für die Verteilungsfunktion der F -Verteilung mit (m, n) Freiheitsgraden den Wert 0,95 hat



Beispiel: Bei $(7, 4)$ Freiheitsgraden ist $F = 0,95$ für $x = 6,09$.

n	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m=6$	$m=7$	$m=8$	$m=9$
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241
2	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21
32	4,15	3,30	2,90	2,67	2,51	2,40	2,31	2,24	2,19
34	4,13	3,28	2,88	2,65	2,49	2,38	2,29	2,23	2,17
36	4,11	3,26	2,87	2,63	2,48	2,36	2,28	2,21	2,15
38	4,10	3,24	2,85	2,62	2,46	2,35	2,26	2,19	2,14
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,14	2,07	2,02
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,13	2,06	2,00
90	3,95	3,10	2,71	2,47	2,32	2,20	2,11	2,04	1,99
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,10	2,03	1,97
150	3,90	3,06	2,66	2,43	2,27	2,16	2,07	2,00	1,94
200	3,89	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	2,06	1,98	1,93
1000	3,85	3,00	2,61	2,38	2,22	2,11	2,02	1,95	1,89
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88

95%



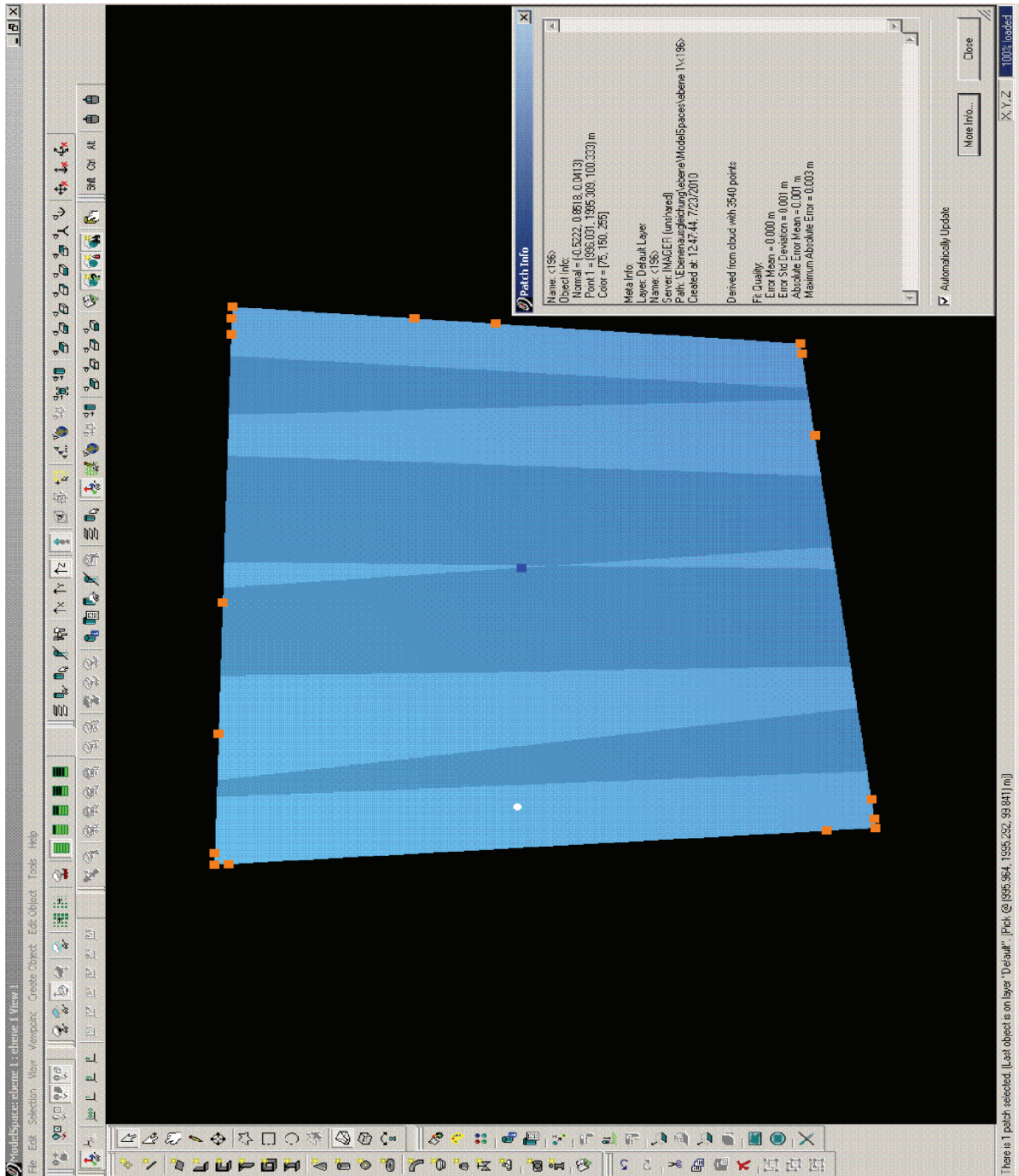
(Fortsetzung)

n	$m = 10$	$m = 15$	$m = 20$	$m = 30$	$m = 40$	$m = 50$	$m = 100$	∞
1	242	246	248	250	251	252	253	254
2	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5
3	8,79	8,70	8,66	8,62	8,59	8,58	8,55	8,53
4	5,96	5,86	5,80	5,75	5,72	5,70	5,66	5,63
5	4,74	4,62	4,56	4,50	4,46	4,44	4,41	4,37
6	4,06	3,94	3,87	3,81	3,77	3,75	3,71	3,67
7	3,64	3,51	3,44	3,38	3,34	3,32	3,27	3,23
8	3,35	3,22	3,15	3,08	3,04	3,02	2,97	2,93
9	3,14	3,01	2,94	2,86	2,83	2,80	2,76	2,71
10	2,98	2,85	2,77	2,70	2,66	2,64	2,59	2,54
11	2,85	2,72	2,65	2,57	2,53	2,51	2,46	2,40
12	2,75	2,62	2,54	2,47	2,43	2,40	2,35	2,30
13	2,67	2,53	2,46	2,38	2,34	2,31	2,26	2,21
14	2,60	2,46	2,39	2,31	2,27	2,24	2,19	2,13
15	2,54	2,40	2,33	2,25	2,20	2,18	2,12	2,07
16	2,49	2,35	2,28	2,19	2,15	2,12	2,07	2,01
17	2,45	2,31	2,23	2,15	2,10	2,08	2,02	1,96
18	2,41	2,27	2,19	2,11	2,06	2,04	1,98	1,92
19	2,38	2,23	2,16	2,07	2,03	2,00	1,94	1,88
20	2,35	2,20	2,12	2,04	1,99	1,97	1,91	1,84
22	2,30	2,15	2,07	1,98	1,94	1,91	1,85	1,78
24	2,25	2,11	2,03	1,94	1,89	1,86	1,80	1,73
26	2,22	2,07	1,99	1,90	1,85	1,82	1,76	1,69
28	2,19	2,04	1,96	1,87	1,82	1,79	1,73	1,65
30	2,16	2,01	1,93	1,84	1,79	1,76	1,70	1,62
32	2,14	1,99	1,91	1,82	1,77	1,74	1,67	1,59
34	2,12	1,97	1,89	1,80	1,75	1,71	1,65	1,57
36	2,11	1,95	1,87	1,78	1,73	1,69	1,62	1,55
38	2,09	1,94	1,85	1,76	1,71	1,68	1,61	1,53
40	2,08	1,92	1,84	1,74	1,69	1,66	1,59	1,51
50	2,03	1,87	1,78	1,69	1,63	1,60	1,52	1,44
60	1,99	1,84	1,75	1,65	1,59	1,56	1,48	1,39
70	1,97	1,81	1,72	1,62	1,57	1,53	1,45	1,35
80	1,95	1,79	1,70	1,60	1,54	1,51	1,43	1,32
90	1,94	1,78	1,69	1,59	1,53	1,49	1,41	1,30
100	1,93	1,77	1,68	1,57	1,52	1,48	1,39	1,28
150	1,89	1,73	1,64	1,53	1,48	1,44	1,34	1,22
200	1,88	1,72	1,62	1,52	1,46	1,41	1,32	1,19
1000	1,84	1,68	1,58	1,47	1,41	1,36	1,26	1,08
∞	1,83	1,67	1,57	1,46	1,39	1,35	1,24	1,00

Quelle: Script Behandeln von Fehlern, E. H. Knickmeyer, 2006/2007

Anhang C

Ebenenparameter mit der Software Cyclone



Anhang C

Ebenenparameter mit der Software Geomagic

The screenshot shows the Geomagic Quality 11 interface. The main window displays a point cloud of a rectangular plate with a red dashed line representing the fitted plane. A dialog box titled 'Ebene 1 - Eigenschaften' is open, showing the following data:

Feature-Eigenschaften		Passungsstatistik		
1	Zentrum	995.532; 1995.032; 997.740 m	Zahl der Punkte	3540
2	Normal	-0.522; 0.652; 0.042	Maximum (negativ)	-0.003 m
3	Prinzipal	0.653; 0.522; 0.025	Maximum (positiv)	0.002 m
			Standardabweichung	0.001 m

Below the dialog box, the following statistics are displayed:

Aktuelle Punkte: 3540
Ausgewählte Punkte: 0
X: 0.999 [995.033; 996.032] m
Y: 0.668 [1994.696; 1995.366] m
Z: 1.185 [997.148; 100.333] m

The status bar at the bottom indicates: 'Linke Taste: Region auswählen | Strg+Linke Taste: Auswahl der Region aufheben | : Ausgewählte Region löschen | Mittlere Taste: Drehen | Umschalt+Rechte Taste: Zoom | Alt+Mittlere Taste: Verschieben' and the time '10:59 am'.

Anhang C

Ebenenparameter mit der Software Cremer

1. mit geringem Anteil von Punkten (Auszug aus Protokoll)

Programmversion : CAPLAN Version 07-Apr-2009
Berechnung vom : 06-Aug-2010, Uhrzeit 08:57

31052010.dat

* AUSGLEICHENDE EBENE

Zur Berechnung einer ausgleichenden Ebene werden mindestens 3 Stützpunkte benötigt. Der Normalenvektor der Ebene ist nach oben orientiert (d.h., die Komponente nz ist immer positiv):

Normalenvektor der Ebene		Hz-Richtung	Zenitwinkel
X-Komponente (nx)	-0.53177899	(gon)	(gon)
Y-Komponente (ny)	0.83402926	363.8648	90.6082
Z-Komponente (nz)	0.14699084	+ - 0.0039	+ - 0.0038

Der Normalenvektor n wird ergänzt durch die beiden Vektoren u und v, welche die Ebene aufspannen. Dabei liegt v in der vertikalen Ebene und zeigt nach oben, während u die horizontale Spur der Ebene markiert. Der Richtungswinkel der horizontalen Spur beträgt 263.8648 gon.

Die Genauigkeit der Ebene leitet sich ab von den Abständen der Stützpunkte senkrecht zur Ebene. Die Transformation aller Stützpunkte in das Lokalsystem u-v-n der Ebene ergibt sich aus folgender Tabelle:

Punktname	Rechtswert	Hochwert	Höhe	u-Wert	v-Wert	Abstand
?	996.003	1995.126	100.351	-0.498	0.630	-0.002
?	995.977	1995.111	100.349	-0.468	0.628	-0.001
?	995.952	1995.095	100.346	-0.438	0.625	-0.002
?	995.927	1995.079	100.343	-0.409	0.622	-0.002
?	995.901	1995.064	100.340	-0.379	0.619	-0.001
?	995.875	1995.048	100.338	-0.348	0.617	-0.001
...						
?	995.875	1995.249	99.196	-0.456	-0.538	-0.001
?	995.900	1995.264	99.198	-0.485	-0.536	-0.002
?	995.926	1995.280	99.201	-0.516	-0.533	-0.002
?	995.951	1995.296	99.204	-0.546	-0.530	-0.001
?	995.976	1995.311	99.207	-0.575	-0.527	-0.002
?	996.002	1995.327	99.209	-0.605	-0.525	-0.002
?	996.027	1995.343	99.212	-0.635	-0.522	-0.001

Mittlerer Abstand der Punkte von der Ebene 0.001

2. mit allen Punkten (Auszug aus Protokoll)

Programmversion : CAPLAN Version 07-Apr-2009
 Berechnung vom : 06-Aug-2010, Uhrzeit 14:32

Ebene2

* AUSGLEICHENDE EBENE

Zur Berechnung einer ausgleichenden Ebene werden mindestens 3 Stützpunkte benötigt. Der Normalenvektor der Ebene ist nach oben orientiert (d.h., die Komponente nz ist immer positiv):

Normalenvektor der Ebene	Hz-Richtung	Zenitwinkel
X-Komponente (nx)	-0.52221414 (gon)	(gon)
Y-Komponente (ny)	0.85181538 364.9880	97.3721
Z-Komponente (nz)	0.04126684 +- 0.0021	+- 0.0022

Der Normalenvektor n wird ergänzt durch die beiden Vektoren u und v, welche die Ebene aufspannen. Dabei liegt v in der vertikalen Ebene und zeigt nach oben, während u die horizontale Spur der Ebene markiert. Der Richtungswinkel der horizontalen Spur beträgt 264.9880 gon.

Die Genauigkeit der Ebene leitet sich ab von den Abständen der Stützpunkte senkrecht zur Ebene. Die Transformation aller Stützpunkte in das Lokalsystem u-v-n der Ebene ergibt sich aus folgender Tabelle:

Punktname	Rechtswert	Hochwert	Höhe	u-Wert	v-Wert	Abstand
? 996.015	1995.298	100.333	-0.550	0.593	-0.001	
? 995.998	1995.288	100.332	-0.530	0.592	-0.001	
? 995.981	1995.277	100.332	-0.510	0.592	-0.001	
? 995.964	1995.267	100.331	-0.491	0.591	-0.001	
? 995.946	1995.257	100.331	-0.470	0.591	0.000	
? 995.929	1995.246	100.330	-0.450	0.590	-0.001	
? 995.912	1995.236	100.330	-0.430	0.590	0.000	
? 995.895	1995.225	100.329	-0.410	0.589	-0.001	
? 995.878	1995.214	100.329	-0.390	0.589	-0.001	
? 995.861	1995.204	100.328	-0.370	0.588	-0.001	
...						
? 995.143	1994.821	99.151	0.443	-0.590	-0.001	
? 995.126	1994.810	99.150	0.463	-0.591	-0.001	
? 995.109	1994.800	99.150	0.482	-0.591	-0.001	
? 995.092	1994.789	99.149	0.503	-0.592	-0.002	
? 995.074	1994.779	99.149	0.523	-0.592	-0.001	
? 995.058	1994.768	99.148	0.543	-0.593	-0.002	
? 995.041	1994.758	99.148	0.562	-0.593	-0.001	
? 995.033	1994.754	99.148	0.571	-0.593	-0.001	

 Mittlerer Abstand der Punkte von der Ebene 0.001

Anhang D

Epoche 0	Epoche 1	Epoche 3
Raster=2; Varianz=0.001^2; sx=0.0005^2; sy=0.0005^2; sz=0.0005^2;		
Deformationsanalyse zweier Epochen Angaben zur Referenzeppoche: Norm1 [m] = -0,522206 0,851825 0,041210 ProbelLaengenbed1 = 4,38E-06 s01 = 1,93E-06 Standardabweichungen1 [mm]= 0,040773 0,024942 0,048475 Fd1 = 1,93	Angaben zur Folgeppoche: Norm2 [m] = -0,522206 0,851825 0,041210 ProbelLaengenbed2 = 4,38E-06 s02 = 1,39E-06 Standardabweichungen2 [mm] = 0,040773 0,024942 0,048475 Fd2 = 1,93 Test beider Varianzen Fd = 0,72 Die Varianzschätzwerte widersprechen nicht der Annahme, dass beide Messreihen mit der gleichen Genauigkeit gemessen wurden. Winkel zwischen den Normalheitsvektoren alpha [gon] = 0,000000 y^= 0,00 Es besteht keine Gefahr.	Angaben zur Folgeppoche: Norm2 [m] = -0,522206 0,851825 0,041210 ProbelLaengenbed2 = 4,38E-06 s02 = 1,93E-06 Standardabweichungen2 [mm] = 0,040773 0,024942 0,048475 Fd2 = 1,93 Test beider Varianzen Fd = 1,00 Die Varianzschätzwerte widersprechen nicht der Annahme, dass beide Messreihen mit der gleichen Genauigkeit gemessen wurden. Winkel zwischen den Normalheitsvektoren alpha [gon] = 0,000000 yD = 0,00 Es besteht keine Gefahr.

Epoche 0		Epoche 6		Epoche 8	
		Raster=2; Varianz=0.001^2; sx=0.0005^2; sy=0.0005^2; sz=0.0005^2;			
Deformationsanalyse zweier Epochen		Deformationsanalyse zweier Epochen		Deformationsanalyse zweier Epochen	
Angaben zur Referenzepoche:		Angaben zur Folgepoche:		Angaben zur Folgepoche:	
Norm1 [m] =	-0,522206 0,851825 0,041210	Norm2 [m] =	-0,521454 0,851461 0,055959	Norm2 [m]=	-0,531984 0,844597 0,070312
ProbelLaengenbed1 =	4,38E-06	ProbeLaengenbed2 =	3,07E-05	ProbelLaengenbed2 =	0,001295880525016
s01 =	1,93E-06	s02 =	2,18E-06	s02 =	2,45E-06
Standardabweichungen1 [mm]=	0,040773 0,024942 0,048475	Standardabweichungen2 [mm] =	0,043176 0,026706 0,051382	Standardabweichungen2 [mm] =	0,044902 0,030161 0,054441
Fd1 =	1,93	Fd2 =	2,18	Fd2 =	2,45
		Test beider Varianzen		Test beider Varianzen	
Fd =	1,13	Fd =	1,13	Fd =	1,27
Die Nullhypothese ist zu verwerfen. Die Messreihen liegen nicht mit den gleichen Genauigkeiten vor.		Die Nullhypothese ist zu verwerfen. Die Messreihen liegen nicht mit den gleichen Genauigkeiten vor.		Die Nullhypothese ist zu verwerfen. Die Messreihen liegen nicht mit den gleichen Genauigkeiten vor.	
Winkel zwischen den Normaleinheitsvektoren		Winkel zwischen den Normaleinheitsvektoren		Winkel zwischen den Normaleinheitsvektoren	
alpha [gon] =		alpha [gon] =	0,02876	alpha [gon] =	0,772617967
yD =	10,26	yD =		yD =	262,40
Warnung: Deformationsanalyse ergab signifikante Veränderung!		Warnung: Deformationsanalyse ergab signifikante Veränderung!		Warnung: Deformationsanalyse ergab signifikante Veränderung!	

Epoche 0	Epoche 1	Epoche 4
Raster=10; Varianz=0.001^2; sx=0.0005^2; sy=0.0005^2; sz=0.0005^2;		
Deformationsanalyse zweier Epochen Angaben zur Referenzepoche:	Angaben zur Folgepoche:	Angaben zur Folgepoche:
Norm1 [m] =	Norm2 [m] =	Norm2 [m] =
-0,522097	-0,522097	-0,522097
0,851892	0,851892	0,851892
0,041210	0,041210	0,041210
ProbelLaengenbed1 = s01 = Standardabweichungen1 [mm]=	ProbelLaengenbed2 = s02 = Standardabweichungen2 [mm] =	ProbelLaengenbed2 = s02 = Standardabweichungen2 [mm] =
3,87E-06	3,87E-06	3,87E-06
2,05E-06	2,05E-06	2,05E-06
0,092305 0,056471 0,111509	0,092305 0,056471 0,111509	0,092305 0,056471 0,111509
Fd1 =	Fd2 =	Fd2 =
2,05	2,05	2,05
Test beider Varianzen Fd =	Test beider Varianzen Fd =	Test beider Varianzen Fd =
		1,00
Die Varianzschätzwerte widersprechen nicht der Annahme, dass beide Messreihen mit der gleichen Genauigkeit gemessen wurden.	Die Varianzschätzwerte widersprechen nicht der Annahme, dass beide Messreihen mit der gleichen Genauigkeit gemessen wurden.	Die Varianzschätzwerte widersprechen nicht der Annahme, dass beide Messreihen mit der gleichen Genauigkeit gemessen wurden.
Winkel zwischen den Normaleinheitsvektoren	Winkel zwischen den Normaleinheitsvektoren	Winkel zwischen den Normaleinheitsvektoren
alpha [gon] =	alpha [gon] =	alpha [gon] =
y^=	y^=	y^=
	0,00000	0,00000
	0,00	0,00
Es besteht keine Gefahr.	Es besteht keine Gefahr.	Es besteht keine Gefahr.

Epoche 0		Epoche 5		Epoche 7	
Deformationsanalyse zweier Epochen					
Angaben zur Referenzeppoche:					
Norm1 [m] =	-0,522097 0,851892 0,041210	Norm2 [m] =	-0,521404 0,851485 0,056027	Angaben zur Folgeppoche:	
ProbelLaengenbed1 =	3,87E-06	ProbelLaengenbed2 =	2,74E-05	Norm2 [m] =	-0,531243 0,847141 0,011954
s01 =	2,05E-06	s02 =	2,37E-06	ProbelLaengenbed2 =	9,47E-06
Standardabweichungen1 [mm]=	0,092305 0,056471 0,111509	Standardabweichungen2 [mm] =	0,099198 0,061348 0,119934	s02 =	1,89E-06
Fd1 =	2,05	Fd2 =	2,37	Test beider Varianzen	1,89
		Test beider Varianzen		Fd =	0,92
		Fd =	1,16	Die Varianzschätzwerte widersprechen nicht der Annahme, dass beide Messreihen mit der gleichen Genauigkeit gemessen wurden.	
		Die Nullhypothese ist zu verwerfen. Die Messreihen liegen nicht mit den gleichen Genauigkeiten vor.		Winkel zwischen den Normaleinheitsvektoren	
		Winkel zwischen den Normaleinheitsvektoren		alpha [gon] =	0,654513743
		alpha [gon] =	0,02410	y^=	108,20
		y^=	3,77	Warnung: Deformationsanalyse ergab signifikante Veränderung!	

Epoche 0	Epoche 4	Epoche 8
Raster=20; Varianz=0.001^2; sx=0.0005^2; sy=0.0005^2; sz=0.0005^2;		
Deformationsanalyse zweier Epochen Angaben zur Referenzepoche:	Angaben zur Folgepoche:	Angaben zur Folgepoche:
Norm1 [m] = -0,522055 0,851917 0,041218	Norm2 [m] = -0,522055 0,851917 0,041218	Norm2 [m] = -0,531469 0,844564 0,070187
ProbelLaengenbed1 = 3,58E-06	ProbelLaengenbed2 = 3,58E-06	ProbelLaengenbed2 = 6,73E-04
s01 = 2,37E-06	s02 = 2,37E-06	s02 = 2,71E-06
Standardabweichungen1 [mm] = 0,131867 0,080716 0,169804	Standardabweichungen2 [mm] = 0,131867 0,080716 0,169804	Standardabweichungen2 [mm] = 0,138385 0,091616 0,180916
Fd1 = 2,37	Fd2 = 2,37	Fd2 = 2,71
Test beider Varianzen	Test beider Varianzen	Test beider Varianzen
Fd =	Fd =	Fd =
Die Varianzschätzwerte widersprechen nicht der Annahme, dass beide Messreihen mit der gleichen Genauigkeit gemessen wurden.	Die Varianzschätzwerte widersprechen nicht der Annahme, dass beide Messreihen mit der gleichen Genauigkeit gemessen wurden.	Die Nullhypothese ist zu verwerfen. Die Messreihen liegen nicht mit den gleichen Genauigkeiten vor.
Winkel zwischen den Normalenheitsvektoren	Winkel zwischen den Normalenheitsvektoren	Winkel zwischen den Normalenheitsvektoren
alpha =	alpha =	alpha =
y^=	y^=	yD =
Es besteht keine Gefahr.	Es besteht keine Gefahr.	Warnung: Deformationsanalyse ergab signifikante Veränderung! 8,20

Epoche 0		Epoche 5		Epoche 6	
Raster=20; Varianz=0.001^2; sx=0.0005^2; sy=0.0005^2; sz=0.0005^2;					
Deformationsanalyse zweier Epochen					
Angaben zur Referenzepoche:					
Norm1 [m] =	-0,522055 0,851917 0,041218	Norm2 [m] =	-0,521260 0,851578 0,055850	Angaben zur Folgepoche:	
ProbelLaengenbed1 =	3,58E-06	ProbeLaengenbed2 =	1,60E-05	Norm2 [m] =	-0,521260 0,851578 0,055850
s01 =	2,37E-06	s02 =	2,55E-06	ProbelLaengenbed2 =	1,60E-05
Standardabweichungen1 [mm] =	0,131867 0,080716 0,169804	Standardabweichungen2 [mm] =	0,136506 0,084330 0,175827	s02 =	2,55E-06
Fd1 =	2,37	Fd2 =	2,55	Standardabweichungen2 [mm] =	0,136506 0,084330 0,175827
		Test beider Varianzen		Fd2 =	2,55
		Fd =	1,07	Test beider Varianzen	
		Die Nullhypothese ist zu verwerfen. Die Messreihen liegen nicht mit den gleichen Genauigkeiten vor.			
		Winkel zwischen den Normaleinheitsvektoren			
		alpha [gon] =	0,031934	Fd =	1,07
		yD =	3,56	Die Nullhypothese ist zu verwerfen. Die Messreihen liegen nicht mit den gleichen Genauigkeiten vor.	
		Winkel zwischen den Normaleinheitsvektoren			
		alpha [gon] =			
		yD =			
		Warning: Deformationsanalyse ergab signifikante Veränderung!			
		Warning: Deformationsanalyse ergab signifikante Veränderung!			

Epoche 0	Epoche 3	Epoche 5
Raster=50; Varianz=0.001^2; sx=0.0005^2; sy=0.0005^2; sz=0.0005^2;		
Deformationsanalyse zweier Epochen Angaben zur Referenzepoche:	Angaben zur Folgepoche:	Angaben zur Folgepoche:
Norm1 [m] = -0,521998 0,851947 0,413795 ProbelLaengenbed1 = 8,03E-06 s01 = 1,71E-06 Standardabweichungen1 [mm]= 0,1884760 0,1160682 0,2268291 Fd1 = 1,71	Norm2 [m] = -0,521998 0,851947 0,041380 ProbelLaengenbed2 = 8,03E-06 s02 = 1,71E-06 Standardabweichungen2 [mm] = 0,1884760 0,1160682 0,2268291 Fd2 = 1,71 Test beider Varianzen Fd = 1,00 Die Varianzschätzwerte widersprechen nicht der Annahme, dass beide Messreihen mit der gleichen Genauigkeit gemessen wurden. Winkel zwischen den Normaleinheitsvektoren alpha [gon] = 0,00000 y^= 0,00 Es besteht keine Gefahr.	Norm2 [m] = -0,521365 0,851490 0,056288 ProbelLaengenbed2 = 2,53E-05 s02 = 2,23E-06 Standardabweichungen2 [mm] = 0,2151570 0,1332928 0,2588115 Fd2 = 2,23 Test beider Varianzen Fd = 1,30 Die Nullhypothese ist zu verwerfen. Die Messreihen liegen nicht mit den gleichen Genauigkeiten vor. Winkel zwischen den Normaleinheitsvektoren alpha [gon] = 0,019180 y^= 1,42 Es besteht keine Gefahr.

Epoche 0		Epoche 6		Epoche 7	
Raster=50; Varianz=0.001^2; sx=0.0005^2; sy=0.0005^2; sz=0.0005^2;					
Deformationsanalyse zweier Epochen					
Angaben zur Referenzepoche:		Angaben zur Folgepoche:		Angaben zur Folgepoche:	
Norm1 [m] =		Norm2 [m] =		Norm2 [m] =	
-0,521998		-0,521365		-0,531926	
0,851947		0,851490		0,844557	
0,041380		0,056288		0,070331	
ProbelLaengenbed1 =		ProbelLaengenbed2 =		ProbelLaengenbed2 =	
8,03E-06		2,53E-05		0,001169	
s01 =		s02 =		s02 =	
1,71E-06		2,23E-06		2,16E-06	
Standardabweichungen1 [mm]=		Standardabweichungen2 [mm] =		Standardabweichungen2 [mm] =	
0,188476		0,215157		0,207277	
0,116068		0,133293		0,139244	
0,226829		0,258812		0,253889	
Fd1 =		Fd2 =		Fd2 =	
1,71		2,23		2,16	
Test beider Varianzen		Test beider Varianzen		Test beider Varianzen	
Fd =		Fd =		Fd =	
1,30		1,30		1,26	
Die Nullhypothese ist zu verwerfen. Die Messreihen liegen nicht mit den gleichen Genauigkeiten vor.		Die Nullhypothese ist zu verwerfen. Die Messreihen liegen nicht mit den gleichen Genauigkeiten vor.		Die Nullhypothese ist zu verwerfen. Die Messreihen liegen nicht mit den gleichen Genauigkeiten vor.	
Winkel zwischen den Normalenheitsvektoren		Winkel zwischen den Normalenheitsvektoren		Winkel zwischen den Normalenheitsvektoren	
alpha [gon] =		alpha [gon] =		alpha [gon] =	
y^=		0,019180		0,78623	
1,42		1,42		57,73	
Es besteht keine Gefahr.		Es besteht keine Gefahr.		Warnung: Deformationsanalyse ergab signifikante Veränderung!	

Varianz=0.001*2; sx=0.0005*2; sy=0.0005*2; sz=0.0005*2;

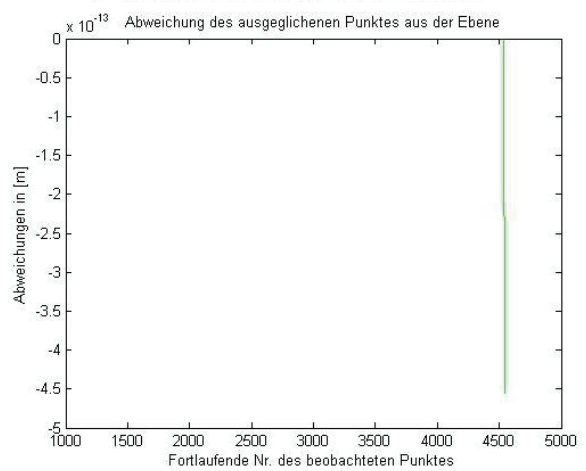
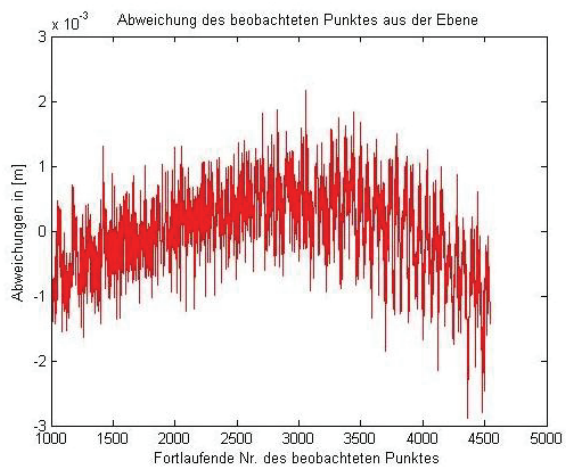
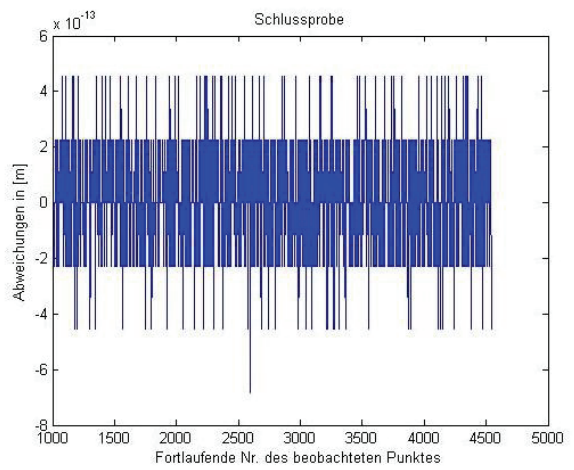
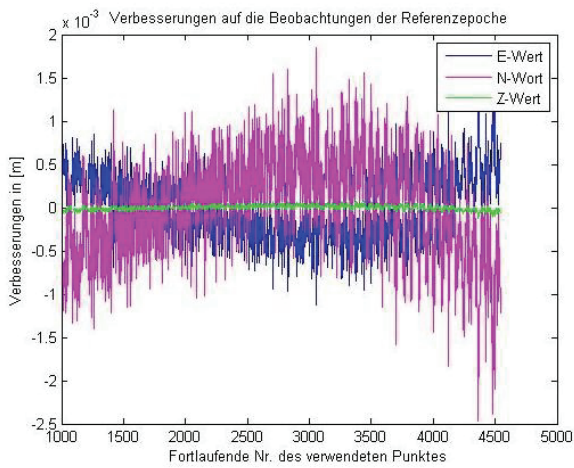
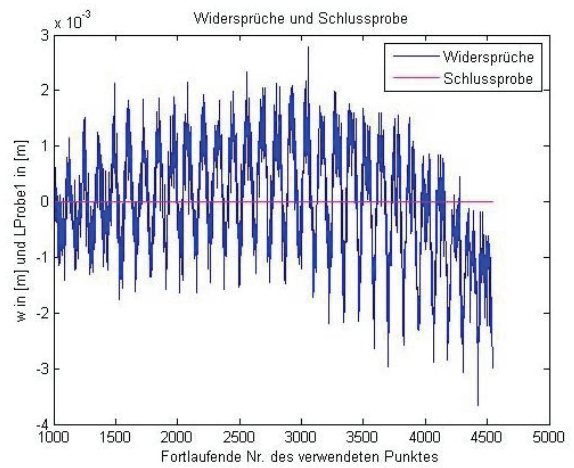
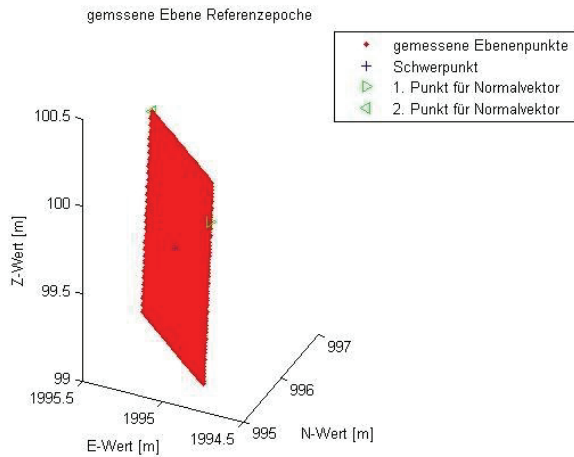
Epoche 0		Epoche 5		Epoche 4	
Raster 2		Raster=5		Raster=10	
Deformationsanalyse zweier Epochen Angaben zur Referenzeppoche:		Angaben zur Folgeppoche:		Angaben zur Folgeppoche:	
Norm1 [m] =		Norm2 [m] =		Norm2 [m] =	
-0,522206		-0,521428		-0,522097	
0,851825		0,851476		0,851892	
0,041210		0,055961		0,041210	
ProbelLaengenbed1 =		ProbelLaengenbed2 =		ProbelLaengenbed2 =	
4,38E-06		3,00E-05		3,87E-06	
s01 =		s02 =		s02 =	
1,93E-06		2,33E-06		2,05E-06	
Standardabweichungen1 [mm]=		Standardabweichungen2 [mm] =		Standardabweichungen2 [mm] =	
0,040773		0,070484		0,092305	
0,024942		0,043593		0,056471	
0,048475		0,084041		0,111509	
Fd1 =		Fd2 =		Fd2 =	
1,93		2,33		2,05	
Test beider Varianzen		Test beider Varianzen		Test beider Varianzen	
Fd =		Fd =		Fd =	
		1,20		1,06	
Die Nullhypothese ist zu verwerfen. Die Messreihen liegen nicht mit den gleichen Genauigkeiten vor.		Die Nullhypothese ist zu verwerfen. Die Messreihen liegen nicht mit den gleichen Genauigkeiten vor.		Die Nullhypothese ist zu verwerfen. Die Messreihen liegen nicht mit den gleichen Genauigkeiten vor.	
Winkel zwischen den Normalinheitsvektoren		Winkel zwischen den Normalinheitsvektoren		Winkel zwischen den Normalinheitsvektoren	
alpha [gon] =		alpha [gon] =		alpha [gon] =	
		0,03245		0,00815	
yD =		yD =		yD =	
		7,15		1,72	
Warnung: Deformationsanalyse ergab signifikante Veränderung!		Warnung: Deformationsanalyse ergab signifikante Veränderung!		Es besteht keine Gefahr.	

Epoche 0		Epoche 5		Epoche 6	
Raster=2 Deformationsanalyse zweier Epochen Angaben zur Referenzepoche:		Raster=10; Varianz=0.001^2; sx=0.0005^2; sy=0.0005^2; sz=0.0005^2; Angaben zur Folgepoche:			
Norm1 [m] =	-0,522206 0,851825 0,041210	Norm2 [m] =	-0,521404 0,851485 0,056027	Norm2 [m] =	-0,521404 0,851485 0,056027
ProbeLaengenbed1 =	4,38E-06	ProbeLaengenbed2 =	2,74E-05	ProbeLaengenbed2 =	2,74E-05
s01 =	1,93E-06	s02 =	2,37E-06	s02 =	2,37E-06
Standardabweichungen1 [mm]=	0,040773 0,024942 0,048475	Standardabweichungen2 [mm] =	0,099198 0,061348 0,119934	Standardabweichungen2 [mm] =	0,099198 0,061348 0,119934
Fd1 =	1,93	Fd2 =	2,37	Fd2 =	2,37
		Test beider Varianzen		Test beider Varianzen	
Fd =		Fd =	1,23	Fd =	1,23
		Die Nullhypothese ist zu verwerfen. Die Messreihen liegen nicht mit den gleichen Genauigkeiten vor.		Die Nullhypothese ist zu verwerfen. Die Messreihen liegen nicht mit den gleichen Genauigkeiten vor.	
		Winkel zwischen den Normaleinheitsvektoren		Winkel zwischen den Normaleinheitsvektoren	
alpha [gon] =		alpha [gon] =	0,03225	alpha [gon] =	0,03225
yD =		yD =	6,35	yD =	6,35
		Warnung: Deformationsanalyse ergab signifikante Veränderung!		Warnung: Deformationsanalyse ergab signifikante Veränderung!	

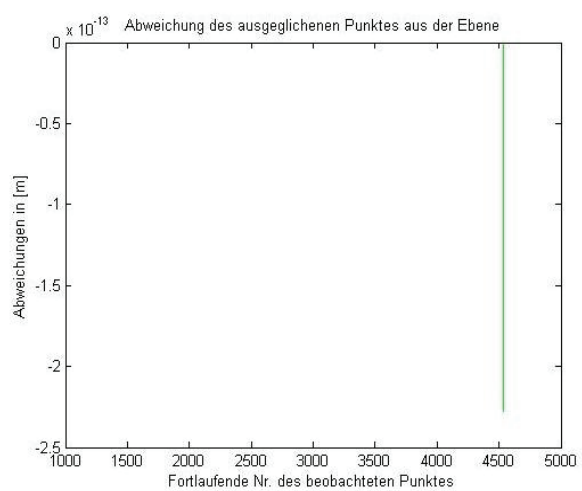
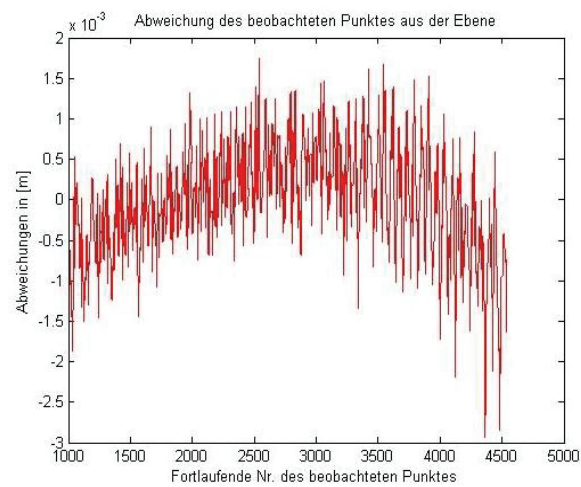
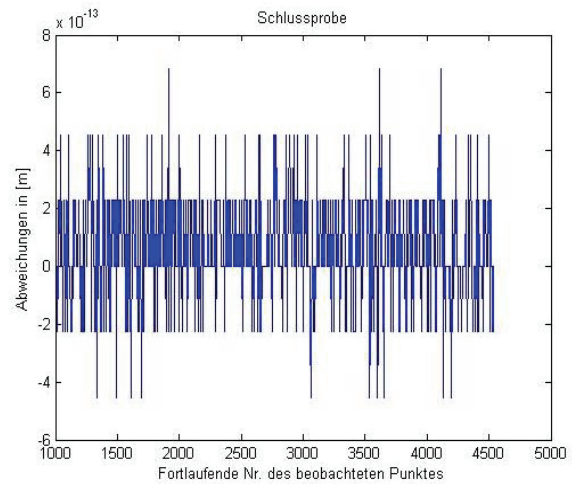
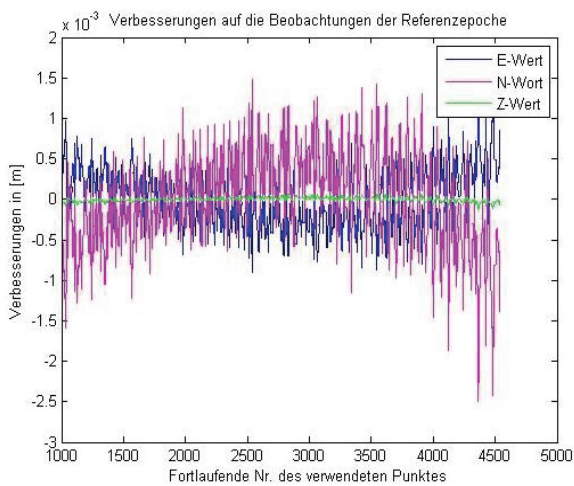
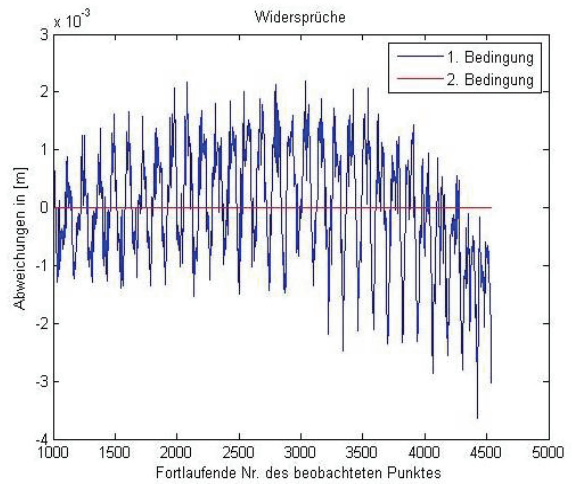
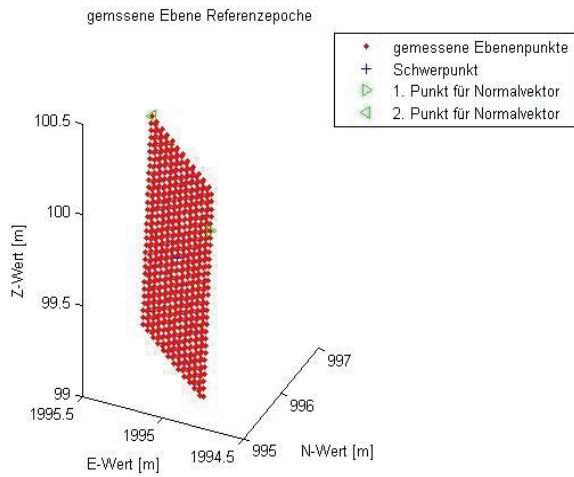
Epoche 0		Epoche 4		Epoche 5	
Raster=2 Deformationsanalyse zweier Epochen Angaben zur Referenzeppoche:		Raster = 20; Varianz=0.001^2; sx=0.0005^2; sy=0.0005^2; sz=0.0005^2; Angaben zur Folgeppoche:			
Norm1 [m] =	-0,522206 0,851825 0,041210	Norm2 [m] =	-0,522055 0,851917 0,041218	Norm2 [m] =	-0,521260 0,851578 0,055850
ProbelLaengenbed1 =	4,38E-06	ProbelLaengenbed2 =	3,58E-06	ProbelLaengenbed2 =	1,60E-05
s01 =	1,93E-06	s02 =	2,37E-06	s02 =	2,55E-06
Standardabweichungen1 [mm]=	0,040773 0,024942 0,048475	Standardabweichungen2 [mm] =	0,131867 0,080716 0,169804	Standardabweichungen2 [mm] =	0,136506 0,084330 0,175827
Fd1 =	1,93	Fd2 =	2,37	Fd2 =	2,55
		Test beider Varianzen		Test beider Varianzen	
		Fd =	1,23	Fd =	1,32
		Die Nullhypothese ist zu verwerfen. Die Messreihen liegen nicht mit den gleichen Genauigkeiten vor.		Die Nullhypothese ist zu verwerfen. Die Messreihen liegen nicht mit den gleichen Genauigkeiten vor.	
		Winkel zwischen den Normalenheitsvektoren		Winkel zwischen den Normalenheitsvektoren	
		alpha [gon] =	0,01130	alpha [gon] =	0,04323
		y^=	1,74	y^=	6,41
		Es besteht keine Gefahr.		Warnung: Deformationsanalyse ergab signifikante Veränderung!	

Anhang D

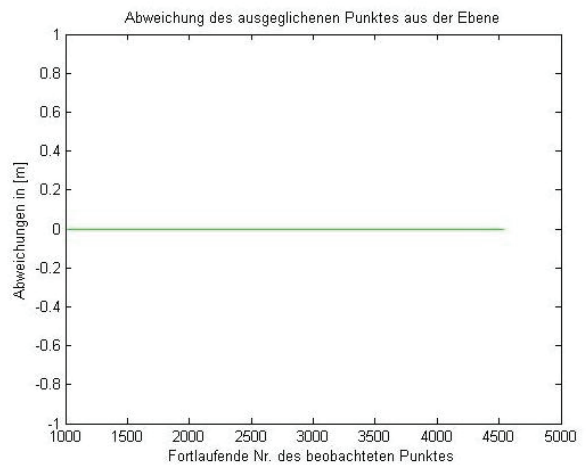
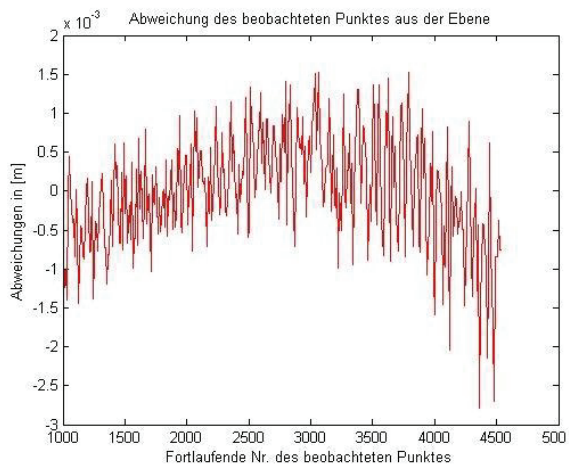
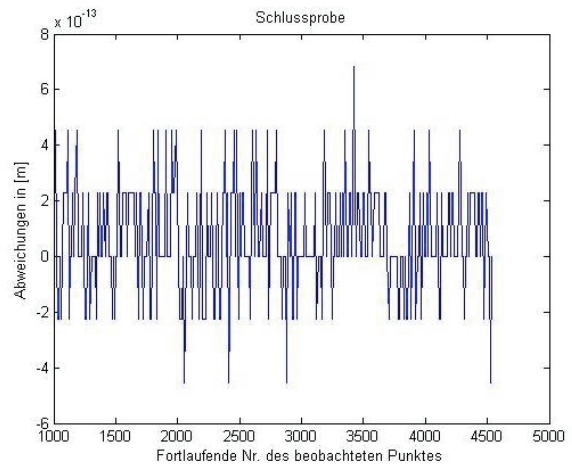
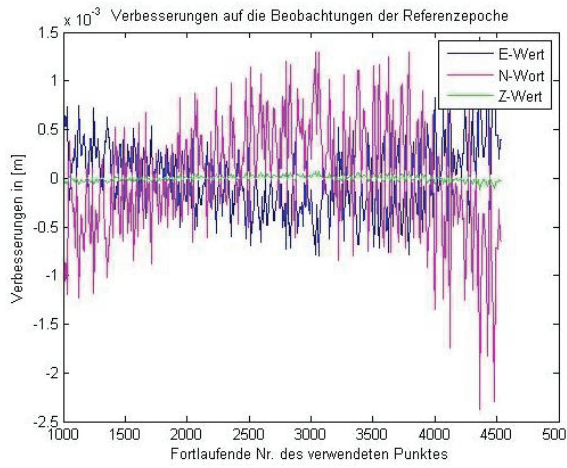
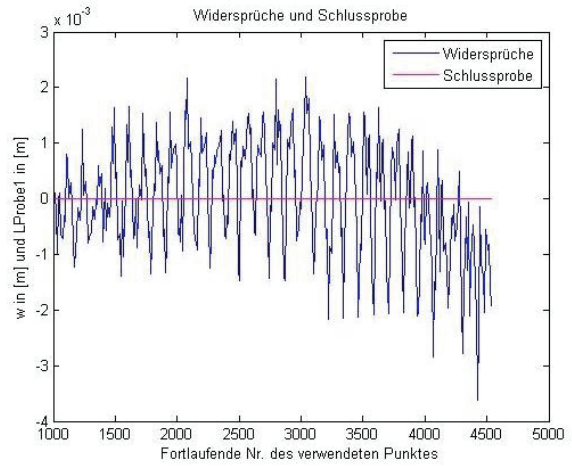
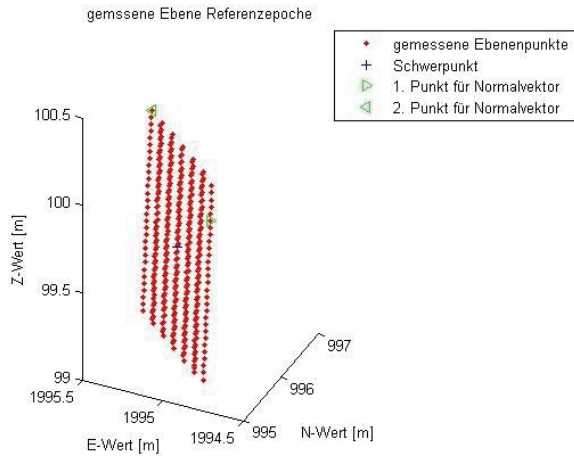
Referenzepoche 310520101.dat (RW 2)



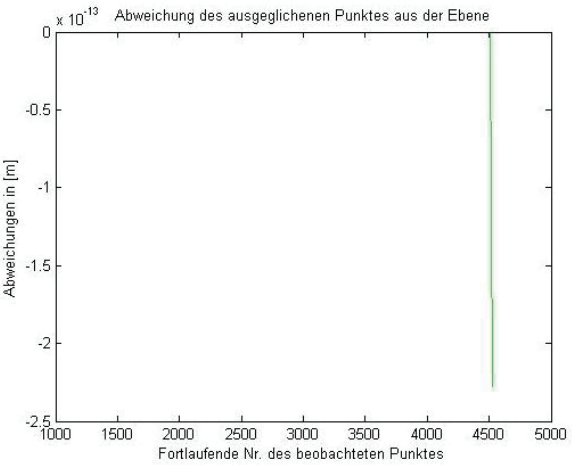
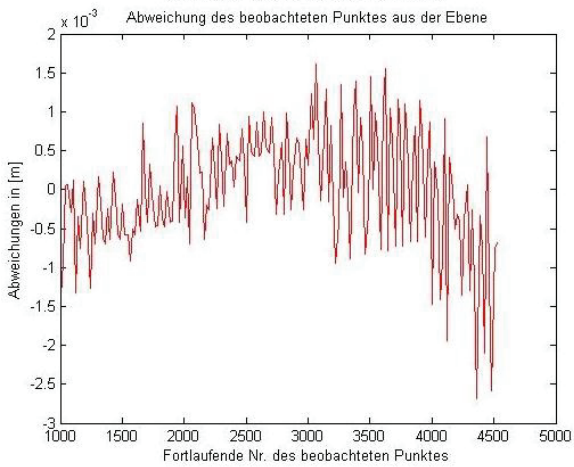
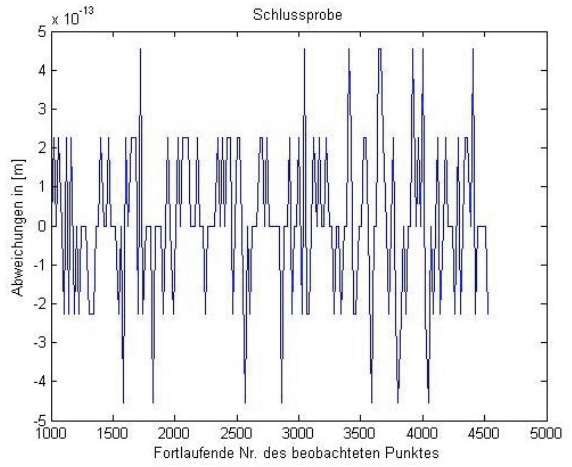
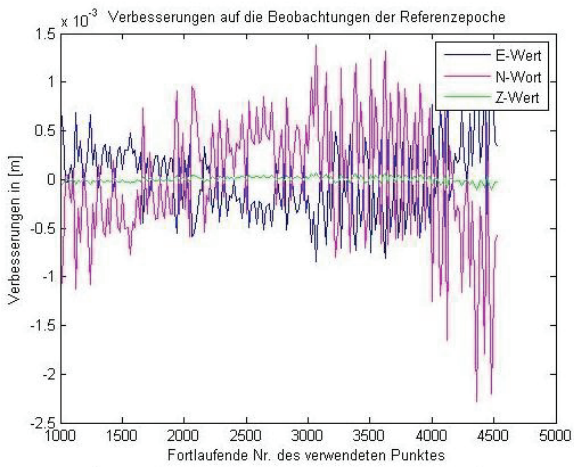
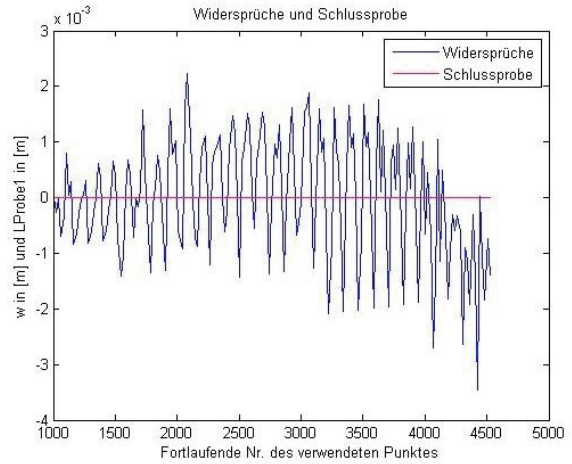
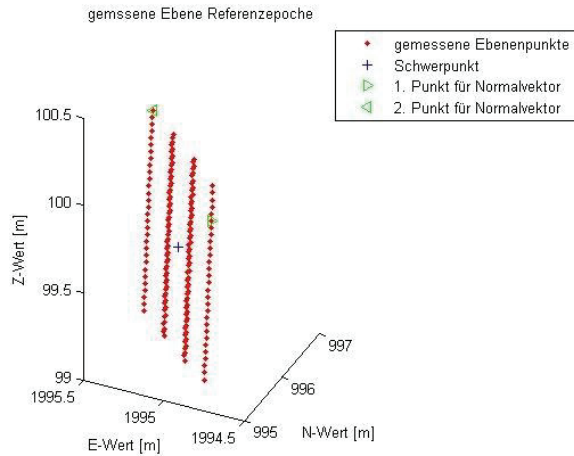
Referenzepoche 310520101.dat (RW 5)



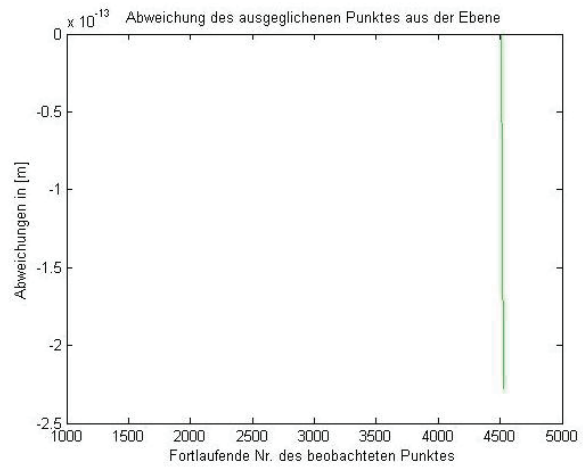
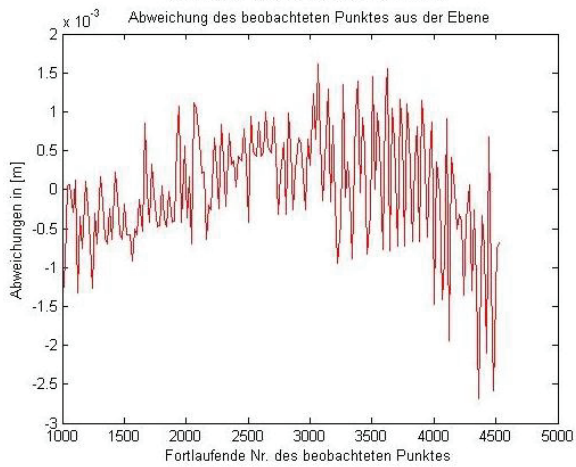
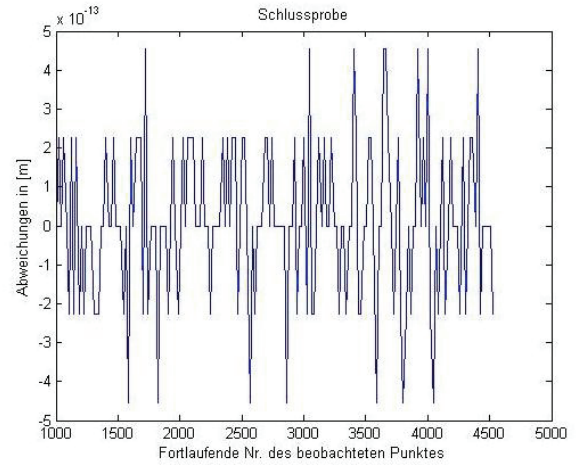
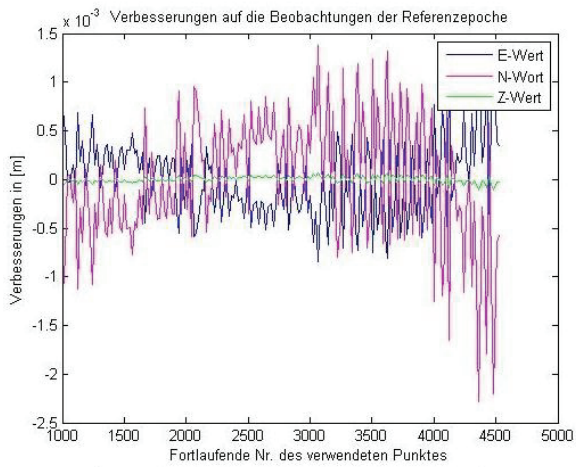
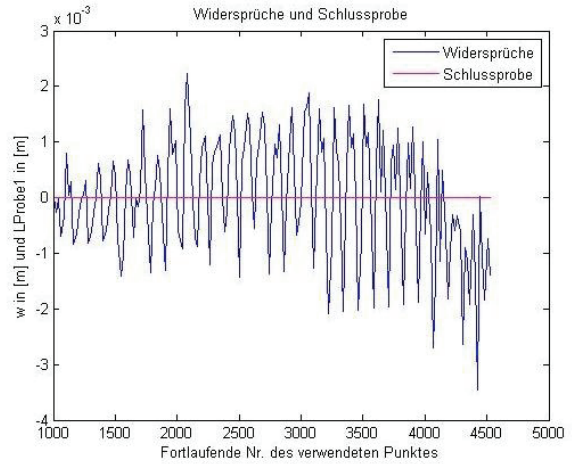
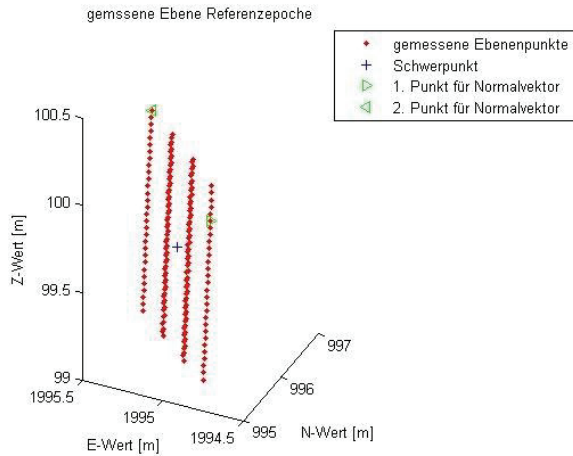
Referenzepoche 310520101.dat (RW 10)



Referenzepoche 310520101.dat (RW 20)



Referenzepoche 310520101.dat (RW 50)



Visualisierung zweier Ebenen:

Referenzepoche zu Epoche 4 (rechts) und Epoche 5 (links) mit einer Rasterweite 5

